

修士論文

視界に制限のある自律移動ロボット群による グラフ探索

長瀨 将太

奈良先端科学技術大学院大学

先端科学技術研究科

情報理工学プログラム

主指導教員: 井上 美智子 教授

ディペンダブルシステム学 研究室（情報科学領域）

令和2年3月13日提出

本論文は奈良先端科学技術大学院大学先端科学技術研究科に
修士(工学) 授与の要件として提出した修士論文である。

長瀨 将太

審査委員：

井上 美智子 教授	(主指導教員, 情報科学領域)
笠原 正治 教授	(副指導教員, 情報科学領域)
大下 福仁 准教授	(副指導教員, 情報科学領域)
新谷 道広 助教	(副指導教員, 情報科学領域)

視界に制限のある自律移動ロボット群による グラフ探索*

長瀨 将太

内容梗概

本論文では、自律移動ロボット群によるグラフ探索アルゴリズムについて検討する。ロボットは視界に制限があり、定数距離の範囲内のノードを観測することができる。また、ロボットはライトを持ち、このライトは定数個の色の集合から選ばれた1色を発することができる。本論文では、永続探索と停止探索の2種類の探索問題を考える。永続探索の目的は、全てのロボットが全てのノードを無限回訪問することである。停止探索の目的は、各ノードを少なくとも1体のロボットが訪問したうえで全てのロボットが移動やライトの色の変更を終えることである。探索対象のグラフとして、リングと有限グリッドの2種類を考える。

リング探索については、観測可能な距離が2以上の定数かつライトの色数が2以上の定数という条件を扱う。この条件のもと、永続探索の達成に2体のロボットが必要十分であること、停止探索の達成に3体のロボットが必要十分であることを証明する。これらの結果は先行研究と比較して、観測可能な距離を大きくすることで探索に必要なロボット数を減らせることを示している。また、ライト2色かつロボット2体の場合について、提案する永続探索アルゴリズムが万能であること、つまり、そのアルゴリズムが可解な初期状況のどれからでも永続探索を達成することを示す。一方、停止探索については、ライト2色かつロボット3体の場合に万能なアルゴリズムが存在しないことを示す。

*奈良先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科 修士論文, 令和2年3月13日.

有限グリッド探索については，様々な条件のもと停止探索アルゴリズムを提案する．また，永続探索や停止探索に必要なロボット数の下界を示す．本研究は，視界に制限のあるロボットによる有限グリッド探索を扱う最初の研究である．

キーワード

可視ライト, 永続探索, 停止探索, 方向感覚がないリング, グリッド

Graph Exploration of Autonomous Mobile Robots with Limited Visibility*

Shota Nagahama

Abstract

We investigate graph exploration algorithms for autonomous mobile robots. The robots have limited visibility, that is, they observe nodes within a certain fixed distance, and they are luminous, that is, they have light devices that can emit a color from a set of constant number of colors. We consider two exploration problems: perpetual exploration and terminating exploration. Perpetual exploration requires every robot to visit every node infinitely many times. Terminating exploration requires robots to terminate after every node is visited by a robot at least once. We consider two types of graphs: rings and finite grids.

For ring exploration, we consider the constraint that the visible distance is any constant of at least two and the number of colors of light devices is any constant of at least two. Under the constraint, we prove that 1) two robots are necessary and sufficient to achieve perpetual exploration and 2) three robots are necessary and sufficient to achieve terminating exploration. These results show that the number of robots required for exploration can be reduced by extending their visibility compared to the previous work. We also show that the proposed perpetual ring exploration algorithm for rings is universal, that is, the algorithm achieves perpetual exploration from any solvable initial configuration with two colors and two robots. On the other hand, we show that no universal algorithm exists for terminating ring exploration with two colors and three robots.

*Master's Thesis, Graduate School of Science and Technology, Nara Institute of Science and Technology, March 13, 2020.

For finite grid exploration, we propose terminating exploration algorithms under various constraints. We also show lower bounds of the numbers of robots required for perpetual and terminating exploration. This is the first work of finite grid exploration with limited visibility.

Keywords:

Visible light, Perpetual exploration, Terminating exploration, Unoriented ring, Grid

目次

1. はじめに	1
1.1 背景	1
1.2 リング探索	3
1.2.1 関連研究と動機	3
1.2.2 成果	4
1.3 グリッド探索	6
1.3.1 関連研究と動機	6
1.3.2 成果	6
1.4 論文の構成	7
2. 定義	8
2.1 システムモデル	8
2.1.1 システムの構成	8
2.1.2 ロボットの特徴	9
2.1.3 スケジューラ	9
2.1.4 状況	10
2.1.5 ビュー	11
2.2 アルゴリズム	14
2.3 実行	15
2.4 問題	15
3. リング探索	17
3.1 記述形式に関する定義	17
3.1.1 部分状況	17
3.1.2 探索アルゴリズムのルール	17
3.2 永続探索	18
3.3 停止探索	22
3.3.1 ロボット2体での不可能性	22

3.3.2	ロボット 3 体でのアルゴリズム	23
3.3.3	万能なアルゴリズムが存在しないことの証明	25
4.	グリッド探索	35
4.1	必要なロボット数の下界	35
4.1.1	準備	35
4.1.2	ロボット 1 体での不可能性	36
4.1.3	ϕ が定数かつ 1 色のロボット 2 体での不可能性	36
4.1.4	半同期かつ $\phi = 1$ のロボット 2 体での不可能性	40
4.2	アルゴリズムのルールの記述形式	42
4.3	提案アルゴリズムによる探索手法の概略	44
4.4	提案アルゴリズム	48
4.4.1	完全同期, $\phi = 2, \ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意 あり, $k = 2$	48
4.4.2	完全同期, $\phi = 2, \ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意 なし, $k = 3$	51
4.4.3	完全同期, $\phi = 2, \ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意 あり, $k = 3$	54
4.4.4	完全同期, $\phi = 2, \ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意 なし, $k = 4$	58
4.4.5	完全同期, $\phi = 1, \ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意 あり, $k = 2$	60
4.4.6	完全同期, $\phi = 1, \ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意 なし, $k = 4$	63
4.4.7	完全同期, $\phi = 1, \ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意 あり, $k = 3$	65
4.4.8	完全同期, $\phi = 1, \ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意 なし, $k = 5$	69
4.4.9	非同期, $\phi = 2, \ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あ り, $k = 2$	72

4.4.10	非同期, $\phi = 2$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 3$	75
4.4.11	非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$	78
4.4.12	非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 4$	82
4.4.13	非同期, $\phi = 1$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$	86
4.4.14	非同期, $\phi = 1$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 6$	92
5.	まとめ	101
	謝辞	103
	参考文献	104
	業績リスト	108

図 目 次

1	グリッド上のノードの並びと東西南北との対応	12
2	独立なテリトリ集合の例 ($\phi = 2$)	20
3	Algorithm 2 の実行例 ($\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$)	23
4	Algorithm 3 の実行例 ($\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$)	27
5	Algorithm 4 の実行例 ($\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$)	29
6	$m \times n$ グリッドの超内側に含まれない領域	38
7	グリッド停止探索アルゴリズムの各ルールの記述形式	43
8	提案アルゴリズムによる $m \times n$ グリッドの探索順路	44
9	完全同期かつ $\phi = 1, \ell = 3$ の場合の東へ直進するときの隊列 . . .	45
10	完全同期かつ $\phi = 2, \ell = 2$ で共通のキラリティに合意していない 場合の東へ直進するときの隊列	46
11	完全同期かつ $\phi = 1, \ell = 3$ の場合の西へ直進するときの隊列 . . .	46
12	半同期/非同期かつ $\ell = 3$ で共通のキラリティに合意している場合 の東へ直進するときの隊列	47
13	Algorithm 5 の実行における西への折り返し準備	50
14	Algorithm 5 の実行における東への折り返し準備	51
15	Algorithm 6 の実行における西への折り返し準備	53
16	Algorithm 7 の実行における西への折り返し準備	56
17	Algorithm 7 の実行における東への折り返し準備	57
18	Algorithm 8 の実行における西への折り返し準備	59
19	Algorithm 9 の実行における西への折り返し準備	62
20	Algorithm 9 の実行における東への折り返し準備	62
21	Algorithm 10 の実行における西への折り返し準備	65
22	Algorithm 11 の実行における西への折り返し準備	67
23	Algorithm 11 の実行における東への折り返し準備	68
24	Algorithm 12 の実行における西への折り返し準備	71
25	Algorithm 13 の実行における西への折り返し準備	72
26	Algorithm 13 の実行における東への折り返し準備	74

27	Algorithm 14 の実行における西への折り返し準備	77
28	Algorithm 15 の実行における西への折り返し準備	80
29	Algorithm 15 の実行における東への折り返し準備	81
30	Algorithm 16 の実行における東への直進	84
31	Algorithm 16 の実行における西への折り返し準備	85
32	Algorithm 17 の実行における東への直進	88
33	Algorithm 17 の実行における西への折り返し準備	89
34	Algorithm 17 の実行における西への直進	90
35	Algorithm 17 の実行における東への折り返し準備	91
36	Algorithm 18 の実行における東への直進（前半）	94
37	Algorithm 18 の実行における東への直進（後半）	95
38	Algorithm 18 の実行における西への折り返し（前半）	97
39	Algorithm 18 の実行における西への折り返し（後半）	98

表 目 次

1	視界に制限のある自律移動ロボットによるリング探索	5
2	視界に制限のある自律移動ロボットによるグリッドの停止探索 . .	7
3	一意に区別できない場合がある方向のペアおよび一致するビュー との対応	14

1. はじめに

1.1 背景

自律移動ロボットの協調に関する研究が分散コンピューティングの分野で注目を集めている。この研究の主な目的は、与えられたタスクの達成に必要な最小限のロボットの能力を求めることである。ロボットの代表的なモデルとして、LCM モデル [25] が知られている。LCM モデルでは、ロボットは LCM (Look-Compute-Move) サイクルと呼ばれるサイクルを繰り返し実行する。LCM サイクルは「観測 (Look)」「計算 (Compute)」「移動 (Move)」の 3 つのフェーズから成る。観測フェーズでは、ロボットは他のロボットの位置を観測する。計算フェーズでは、移動する目的地を観測フェーズでの観測結果にしたがって計算する。移動フェーズでは、計算フェーズで計算した目的地に移動する。LCM サイクルの同期モデルとして、完全同期 (fully synchronous)、半同期 (semi-synchronous)、非同期 (asynchronous) の 3 種類がよく扱われている [8, 9, 22, 24]。

研究の主な目的は必要最小限のロボットの能力を求めることであるから、ほとんどの研究は弱い能力のロボットを仮定している。具体的には、ロボットは全て区別不可能で同じアルゴリズムを実行し、メモリを持たず、他のロボットとの直接的な通信を行わない。ロボット間の通信は、観測フェーズで他のロボットの位置を観測するという間接的な方法でのみ行われる。ロボットが動く環境のモデルとしては、ユークリッド平面などの連続的な環境 [17, 18, 25] や、グラフネットワークなどの離散的な環境 [3, 14, 16] が考えられている。

本論文では、グラフネットワークに焦点を当てる。グラフネットワークにおける基本的なタスクの 1 つに探索 (exploration) があり、永続探索 (perpetual exploration) と停止探索 (terminating exploration) の 2 種類がよく研究されている。永続探索の達成条件は、全てのロボットが全てのノードを無限回訪問することである。停止探索の達成条件は、各ノードを少なくとも 1 体のロボットが訪問したうえで、全てのロボットが移動を終えることである。これまでに、永続探索はリング [3] やグリッド [4] で研究され、停止探索はリング [14, 16, 21]、木 [15]、グリッド [12]、トーラス [13]、任意のネットワーク [6] で研究されている。これらの

研究では、探索に必要な最少のロボット数を明らかにすることを目的としている。

探索に焦点を当てている上述の研究は全て、各ロボットが全てのロボットの位置を観測できると仮定している。しかしながら、このような強い能力を仮定することは、ロボットの能力が弱いという原則から好ましくない。この理由から近年の研究では、より現実的なモデルとしてロボットの視界に制限のある場合が考えられている [9, 10]。このモデルのロボットは、ある一定の距離 ϕ の範囲内でのみグラフ上のノード（とノード上のロボット）を観測することができる。このようなモデルは、探索に限らずパターン形成（pattern formation）[2, 20]，収束（convergence）[1]，集合（gathering）[11, 17, 19, 24] といった他のタスクでも検討されている。

視界に制限のある状態を維持しながらロボットの能力を向上させるために、Ooshita と Tixeuil はライト [8] をロボットに追加している [22]。ライトは不揮発性で定数個の色を持ち、定数サイズのメモリとして使用できる。ライトの色は、そのライトを持つロボットの位置を観測可能な他のロボットも観測することができる。Datta らが、 $\phi = 1$ でライトが無い場合に、半同期、非同期モデルでリングの停止探索を達成するアルゴリズムが存在しないことを示している [9]。その後、Ooshita と Tixeuil が、2 色のライトを追加した場合に同じタスクを 4 体のロボットで達成できることを示している [22]。また、Bramas らが、 $\phi = 1$ でライトがある場合と $\phi = 2$ でライトが無い場合について、無限グリッドの探索を検討している [5]。

ロボットの視界に制限のあるモデルでの探索を扱った研究は筆者の知る限り上述の 4 件 [5, 9, 10, 22] のみである。本論文では、まだ検討されていない条件でのリング探索と、視界に制限のあるモデルでの検討が初めてである有限グリッド（以下、グリッド）の探索を扱う。

1.2 リング探索

1.2.1 関連研究と動機

リング探索は，ロボットの視界に制限のあるモデルと制限のないモデルのどちらでも研究されている．まず，視界に制限のないモデルでの研究に焦点を当てる．このモデルでは，任意の初期状況（initial configuration）から探索を達成するために必要なロボット数が検討されている．Flocchini ら [16]，Lamani ら [21]，Devismes ら [14] が非同期モデルでの停止探索に必要なロボット数を検討している．Flocchini ら [16] は，リングのノード数 n がロボット数で割り切れるときに停止探索を達成できない初期状況が存在すること，任意の初期状況から探索を達成するために $\Theta(\log n)$ 体のロボットが必要であるような n が無数に存在することを示している．Lamani ら [21] は， n が偶数のときに 4 体のロボットで任意の初期状況から停止探索を達成するアルゴリズムは存在しないこと， n と 5 が互いに素であるときに 5 体のロボットで任意の初期状況から停止探索を達成できることを示している．Devismes ら [14] は，確率的アルゴリズムを使用した場合に，5 以上の任意の n に対して，半同期モデルでの任意の初期状況からの停止探索に 4 体のロボットが必要十分であることを示している．一方，Blin ら [3] は，非同期モデルでの排他的（exclusive）永続探索に必要なロボット数を検討している．排他的永続探索は，2 体のロボットが同時に同じノードにいたり同じ辺を通っていたりしてはならないという条件が加えられた永続探索である． $n \geq 10$ のとき，この探索の達成に 3 体のロボットが必要十分であることが示されている [3]．

次に，視界に制限のあるモデルでの研究に焦点を当てる．このモデルでは，多くの初期状況がアルゴリズムによらず非可解である．例えば，どのロボットも他のロボットを観測できないとき，探索を達成することはできない．このため，視界に制限のあるモデルを扱う研究では探索を達成するために特定の初期状況を仮定している．

Datta らがライトの無いモデルでのリングの停止探索を研究している [9, 10]． $\phi = 1$ の場合の結果として，完全同期モデルで停止探索を達成するのに 5 体のロボットが必要十分である一方，半同期，非同期モデルで停止探索を達成するアルゴリズムは存在しないことが示されている [9]．また， $\phi = 2, 3$ の場合に半同期，

非同期モデルで停止探索を達成するアルゴリズムが提案されている [10].

Ooshita と Tixeuil は $\phi = 1$ で 2 色以上のライトを持つロボットによるリング探索を研究している [22]. 結果として, 半同期, 非同期モデルでの停止探索の達成に, 4 体のロボットが必要十分であることが示されている. つまり, 2 色以上のライトを追加することで, $\phi = 1$ の場合にも半同期, 非同期モデルでの停止探索が達成可能になることが示されている. 完全同期モデルでの停止探索の達成には, 3 体のロボットが必要十分であることが示されている. これは, $\phi = 1$ でライトが無い場合に 5 体のロボットが必要十分だという結果 [9] に対して, 2 色以上のライトを追加することで必要なロボットを 2 体削減できることを示している. 永続探索については, 完全同期モデルでの達成に 2 体のロボットが必要十分で, 半同期, 非同期モデルでの達成に 3 体のロボットが必要十分であることが示されている. Ooshita と Tixeuil が明らかにしている必要なロボット数に対する上述の結果は, ライトの色数が無限であっても成り立つ. つまり, ライト以外の条件を変更することなく必要なロボット数をこれ以上減らすことはできない. ここで, $\phi \geq 2$ とすれば必要なロボット数は減るだろうかという疑問が湧いてくる.

1.2.2 成果

本論文では, $\phi \geq 2$ で 2 色以上のライトを持つロボットを考え, リング探索の達成に必要な十分なロボット数を明らかにする. これにより, ライトがある場合に $\phi \geq 2$ とすれば必要なロボット数は減るだろうかという疑問に対する解答を示す. 表 1 に本研究と関連研究の成果をまとめる. なお, 1 色のライトを持つロボットは, ライトを持たないロボットと等価である.

上述の疑問に対する解答は次のとおりである. (i) 完全同期モデルでは, 必要なロボット数を減らすことはできない. (ii) 半同期, 非同期モデルでは, 必要なロボット数を 1 体減らすことができる. これらの解答を導くために, $\phi \geq 2$ でライトが 2 色以上の場合は完全同期, 半同期, 非同期モデルのいずれにおいても, 永続探索の達成に 2 体のロボットが, 停止探索の達成に 3 体のロボットが必要十分であることを示す. Ooshita と Tixeuil は $\phi = 1$ の場合に次の 2 点を証明している [22]. (1) 完全同期モデルでは永続探索, 停止探索それぞれの達成に 2 体, 3 体の

表 1: 視界に制限のある自律移動ロボットによるリング探索

文献	探索の種類	同期モデル	ϕ	色数	必要なロボット数	
					下界	上界
[9]	停止探索	完全同期	1	1	5	5
		半同期/非同期			達成不可能	
[10]	停止探索	半同期/非同期	2	1	5	7
			3		5	5
[22]	永続探索	完全同期	1	2 以上	2	2
	停止探索				3	3
	永続探索	半同期/非同期			3	3
	停止探索				4	4
本稿	永続探索	完全同期/半同期/非同期	2 以上	2 以上	2	2
	停止探索				3	3

ロボットが必要十分である。(2) 半同期, 非同期モデルでは永続探索, 停止探索それぞれの達成に 3 体, 4 体のロボットが必要十分である。したがって, 上述の解答が得られる。

本論文の成果として, 永続探索の達成に 2 体のロボットが必要十分であることを証明するために, 同期モデルやライトの色数に関わらず 1 体のロボットでは永続探索を達成できないことと, 非同期モデルでライトが 2 色の場合に 2 体のロボットで永続探索を達成できることを示す (3.2 節)。一方, 停止探索の達成には 3 体のロボットが必要十分であることを証明するために, たとえ完全同期モデルでライトの色数が無限であっても 2 体のロボットでは停止探索を達成できないことと, 非同期モデルでライトが 2 色の場合に 3 体のロボットで永続探索を達成できることを示す (3.3 節)。

視界に制限のあるモデルを扱っているこれまでの研究と同様に, 本論文で示すアルゴリズムは全て, 特定の可解な初期状況を仮定する。観測可能な距離 ϕ , ライトの色数, ロボット数といった条件によって可解な初期状況は異なる。これらの条件を指定したとき, その条件の下で可解な初期状況のどれから実行を始めても探索を達成するアルゴリズムを, 万能な (universal) アルゴリズムと呼ぶ [19, 22]。

可能な限り多くの初期状況に対応することがアルゴリズムとして望ましく，万能なアルゴリズムは好ましい性質を持つ．本論文では，リングの永続探索と停止探索それぞれについて万能なアルゴリズムの有無も検討する．本論文で示すリングの永続探索アルゴリズムは，2以上の任意の ϕ ，ライトの色数2，ロボット数2に対する万能なアルゴリズムである．一方，リングの停止探索については，2以上の任意の ϕ において，ライトの色数2，ロボット数3の万能なアルゴリズムが存在しないことを示す．

1.3 グリッド探索

1.3.1 関連研究と動機

ロボットの視界に制限のないモデルであれば，グリッド探索はすでに研究されている．非同期モデルについて，Bonnet ら [4] は永続探索に必要な十分なロボット数を，Devismes ら [12] は停止探索に必要な十分なロボット数を明らかにしている．Pelc と Tiane は，全てのノードを訪問するだけでなく全ての辺を通ることを目的としたグリッド探索を研究している [23]．また，集合タスクについても，ロボットが動く環境としてグリッドを扱っている研究が存在する [7]．

しかしながら，ロボットの視界に制限のあるモデルでグリッドを扱っている研究は筆者の知る限り存在しない．このモデルでこれまでに探索の対象とされているグラフはリング [9, 10, 22] と無限グリッド [5] のみである．

1.3.2 成果

本論文では，ロボットの視界に制限のあるモデルでのグリッド停止探索アルゴリズムを提案する．これにより，停止探索に必要なロボット数の上界を示す．また，必要なロボット数の下界に関する証明も行う．成果として，本論文で考えるモデルの各条件と，それらの条件での停止探索に必要なロボット数との対応を表2に示す．なお，必要なロボット数の下界に関する証明は全て，より少ないロボット数で全ノードを訪問することが不可能であることに基づいている．よって，永続探索についても同じ下界が成り立つ．

表 2: 視界に制限のある自律移動ロボットによるグリッドの停止探索

同期モデル	ϕ	色数	共通のキラリティに対する合意	必要なロボット数	
				下界	上界
完全同期	2	2	あり	2	2
			なし	2	3
		1	あり	3	3
			なし	3	4
	1	3	あり	2	2
			なし	2	4
		2	あり	2	3
			なし	2	5
半同期/非同期	2	3	あり	2	2
			なし	2	3
		2	あり	2	3
			なし	2	4
	1	3	あり	3	3
			なし	3	6

表 2 に記載されているキラリティ (chirality) とは、各ロボットが自身から見た時計回りと反時計回りを区別するための概念である。共通のキラリティに対する合意があれば、全ロボットが共通の方向を時計回りだと認識する。

1.4 論文の構成

本論文の構成は次のとおりである。第 2 章では、本研究で扱うモデルや問題の定義を与える。第 3 章では、リング探索に関する成果を示す。永続探索に関する成果を示した後、停止探索に関する成果を示す。第 4 章では、グリッド探索に関する成果を示す。必要なロボット数の下界に関する証明を示した後、停止探索アルゴリズムを提案する。最後に、第 5 章で本研究のまとめと今後の課題について述べる。

2. 定義

2.1 システムモデル

2.1.1 システムの構成

システムはグラフ $G = (V_{tx}, E_{dge})$ と k 体のロボットから成る. V_{tx} はノードの集合, E_{dge} は辺の集合である. 各ロボットはグラフのいずれかのノード上に存在する. 各ノードはインデックスを持つが, これらはノードを区別して表記するためにのみ使われ, ロボットが知ることはできない.

本論文では, グラフとしてサイズ n のリングと $m \times n$ グリッドの2種類を考える. サイズ n のリングは以下を満たすグラフ G である.

- $V_{tx} = \{v_i \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$
- $E_{dge} = \{(v_i, v_{(i+1) \bmod n}) \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$

ロボットはノード数 n を知らない. また, リングには方向感覚がない (unoriented). 言い換えると, 2つの隣接しているノード u, v が与えられたときに u が v の右側にあるか左側にあるかといった方向が決まるような情報は存在しない. 以降, リング上のノードのインデックスに対する計算は n を法とする. また, n の大きさに着目していないときは, サイズ n のリングを単にリングと呼ぶ.

$m \times n$ グリッドは以下を満たすグラフ G である.

- $V_{tx} = \{v_{i,j} \mid i \in \{0, 1, \dots, m-1\}, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$
- $E_{dge} = \{(v_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2}) \mid v_{i_1,j_1}, v_{i_2,j_2} \in V_{tx}, |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1\}$

ロボットはグリッドの大きさを表す m, n を知らない. 以降, m, n の大きさに着目していないときは, $m \times n$ グリッドを単にグリッドと呼ぶ.

グラフ上の2つのノード間の距離は, ノード間の最短経路上の辺の個数である. 2つのノード v_1, v_2 間の距離が1のとき, v_1 と v_2 は隣接しているという. 2体のロボット a, b 間の距離は, a と b がそれぞれ存在するノード間の距離である. 2体のロボット a, b 間の距離が1のとき, a と b は隣接しているという.

2.1.2 ロボットの特徴

ロボットは全て同一 (identical) である。つまり、同じアルゴリズムを実行し、ユニークな識別子を持たない。各ロボットは自身や他のロボットから見えるライトを1つ持つ。ロボットは自身のライトの色を集合 Col から1つ選び、メモリとして保持することができる。 Col の要素数が有限のとき、利用できる色の個数を ℓ で表す (つまり、 $\ell = |Col|$)。各ロボットは自身の位置から定数距離 ϕ ($\phi > 0$) 以内のロボットの位置と色を観測することができる。ロボットは全て同一であるから、 ϕ の値は全てのロボットで等しいものとする。

探索するグラフがグリッドである場合、共通のキラリティ (chirality) に対する合意の有無を上記の能力に加えて考える。キラリティによって、各ロボットは自身から見た時計回りと反時計回りを区別する。ロボットが共通のキラリティに合意していれば、全ロボットが共通の方向を時計回りだと認識する。ロボットが共通のキラリティに合意していなければ、全ロボットが共通の方向を時計回りだと認識するとは限らない。つまり、ロボット a にとっての時計回りがロボット b から見れば反時計回りであるような場合がある。

各ロボットは観測 (look)、計算 (compute)、移動 (move) の3つのフェーズから成る LCM サイクル (以下、単にサイクルと呼ぶ) を繰り返すことで動作する。観測フェーズでは、ロボットは距離 ϕ 以内のロボットの位置と色のスナップショットをとる。このスナップショットをビュー (view) と呼ぶ。計算フェーズでは、ロボットは直近の観測フェーズで得たビューと自身のアルゴリズムにしたがって、次の色と移動を決定する。色を変える場合は、計算フェーズの終了時に変える。移動すると決めた場合は、移動フェーズで隣のノードに移動する。

2.1.3 スケジューラ

サイクルの実行の非同期性をモデル化するために、スケジューラ (scheduler) という、各ロボットがいつフェーズを実行するかを決める概念を導入する。スケジューラがロボット r にサイクルまたはフェーズを実行させるとき、スケジューラが r を作動させるという。本論文では、完全同期 (fully synchronous)、半同期 (semi-synchronous)、非同期 (asynchronous) の3種類の同期モデルを考え

る．全ての同期モデルで，時間は無限の時刻の列 $0, 1, 2, \dots$ で表される．ロボットはこの時刻を知ることができない．完全同期モデルと半同期モデルでは，ある時刻 t で作動させられるロボット全てが，1つのサイクルを時刻 t と時刻 $t+1$ の間に同時に実行する．完全同期モデルでは，スケジューラは各時刻に全てのロボットを作動させる．半同期モデルでは，スケジューラは各時刻に1体以上のロボットを選び，選んだロボットを作動させる．非同期モデルでは，スケジューラはロボットのサイクルを非同期に作動させる．言い換えると，各フェーズ間の時間は有限だが，予測不可能である．また，スケジューラは公平（fair）であると仮定する．つまり，各ロボットは無限に繰り返しサイクルを実行する．

2.1.4 状況

各時刻でのシステムの状況（configuration）を，全ロボットの色と位置によって表す．各状況について，ロボットが2体以上いるノードをタワーと呼ぶ．状況の表記には，各ノードに位置するロボットの色の多重集合を用いる．

リングにおける状況 リングに対して，時刻 t でノード v_i に位置するロボットの色の多重集合を $M_i(t)$ で表し，時刻 t での状況 $C(t)$ を $C(t) = (M_0(t), M_1(t), \dots, M_{n-1}(t))$ と定義する． t が文脈から明らかであれば，省略して $C = (M_0, M_1, \dots, M_{n-1})$ と記す．

S をロボットの集合とする．状況 C の可視状態グラフを $G_C(S) = (S, L_C)$ と定義する．状況 C でロボット r_1 と r_2 が互いに見える（つまり，リング上で r_1 と r_2 との距離が高々 ϕ である）とき，また，そのときに限り $(r_1, r_2) \in L_C$ である．もし， $G_C(S)$ が連結グラフであれば，状況 C で S は連結（connected）であるという．さもなければ， C で S は非連結である．

グリッドにおける状況 グリッドに対して，時刻 t でロボットがいるノードの個数を $p(t)$ ，ロボットがいるノードの集合を $Q(t) = \{v_{i_0, j_0}, v_{i_1, j_1}, \dots, v_{i_{p(t)-1}, j_{p(t)-1}}\}$ とおく．このとき，時刻 t での状況 $C(t)$ を $C(t) = \{(v_{i_0, j_0}, M_{i_0, j_0}), (v_{i_1, j_1}, M_{i_1, j_1}), \dots,$

$(v_{i_{p(t)-1}, j_{p(t)-1}}, M_{i_{p(t)-1}, j_{p(t)-1}}))$ と定義する． t が文脈から明らかであれば，リングの場合と同様に省略して記す．

2.1.5 ビュー

各ロボットが観測フェーズで得るビューは，そのロボット自身の色と，距離 ϕ 以内の各ノードに位置するロボットの色の多重集合から成る列によって定義される．

リング上のビュー リング上のノード v_i に位置するロボット r が得るビューを定義する． r が得るビューは，前方のビューと後方のビューの2種類である． r の色を c_r とすると， r の前方のビューは $V_f = (c_r, M_{i-\phi}, \dots, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, \dots, M_{i+\phi})$ と定義される． r の後方のビューは $V_b = (c_r, M_{i+\phi}, \dots, M_{i+1}, M_i, M_{i-1}, \dots, M_{i-\phi})$ と定義される．

もし， r の前方のビューと後方のビューが一致していれば， r のビューは対称 (symmetric) である．この場合，リングには方向感覚がないから， r が2方向のどちらに移動するかを一意に決めることはできない．言い換えると， r が移動するのであれば，スケジューラが r の移動方向を決める．もし， r のビューに他のロボットが含まれていなければ， r は孤立している (isolated) という．

グリッド上のビュー グリッド上のノード $v_{i,j}$ に位置するロボット r が得るビューを定義する． r の色を c_r とする． r が得るビューは複数あり，各ビューはグリッド上の大域的な方角（東西南北）によって方向付けされている．図1に，グリッド上のノードの並びと東西南北との対応を示す．ノード $v_{i,j}$ に位置するロボットから $v_{i-1,j}$ が見える方向を北， $v_{i,j+1}$ が見える方向を東， $v_{i+1,j}$ が見える方向を南， $v_{i,j-1}$ が見える方向を西に対応付けている．ビューに含まれる各 $M_{i',j'}$ について， $i' \notin \{0, 1, \dots, m-1\}$ または $j' \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$ であれば $M_{i',j'} = \perp$ とする．

$\phi = 1$ の場合のビューとして，次の8種類を定義する．

- 北向きのビュー： $V_{1,n} = (c_r, M_{i-1,j}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i+1,j})$
- 東向きのビュー： $V_{1,e} = (c_r, M_{i,j+1}, M_{i-1,j}, M_{i,j}, M_{i+1,j}, M_{i,j-1})$

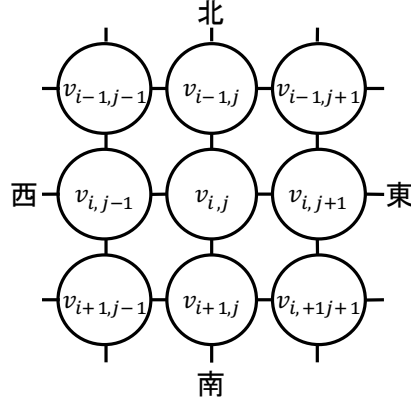


図 1: グリッド上のノードの並びと東西南北との対応

- 南向きのビュー: $V_{1,s} = (c_r, M_{i+1,j}, M_{i,j+1}, M_{i,j}, M_{i,j-1}, M_{i-1,j})$
- 西向きのビュー: $V_{1,w} = (c_r, M_{i,j-1}, M_{i+1,j}, M_{i,j}, M_{i-1,j}, M_{i,j+1})$
- 北向きのビューの鏡像: $V_{1,\nu,\mu} = (c_r, M_{i-1,j}, M_{i,j+1}, M_{i,j}, M_{i,j-1}, M_{i+1,j})$
- 東向きのビューの鏡像: $V_{1,e,\mu} = (c_r, M_{i,j+1}, M_{i+1,j}, M_{i,j}, M_{i-1,j}, M_{i,j-1})$
- 南向きのビューの鏡像: $V_{1,s,\mu} = (c_r, M_{i+1,j}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i-1,j})$
- 西向きのビューの鏡像: $V_{1,w,\mu} = (c_r, M_{i,j-1}, M_{i-1,j}, M_{i,j}, M_{i+1,j}, M_{i,j+1})$

ロボットが共通のキラリティに合意していれば, r は鏡像を除く 4 種類のビュー $V_{1,\nu}, V_{1,e}, V_{1,s}, V_{1,w}$ を得る. ロボットが共通のキラリティに合意していなければ, r は 8 種類全てのビューを得る.

$\phi = 2$ の場合も同様にして, 次の 8 種類のビューを定義する.

- 北向きのビュー: $V_{2,\nu} = (c_r, M_{i-2,j}, M_{i-1,j-1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j+1}, M_{i,j-2}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i,j+2}, M_{i+1,j-1}, M_{i+1,j}, M_{i+1,j+1}, M_{i+2,j})$
- 東向きのビュー: $V_{2,e} = (c_r, M_{i,j+2}, M_{i-1,j+1}, M_{i,j+1}, M_{i+1,j+1}, M_{i-2,j}, M_{i-1,j}, M_{i,j}, M_{i+1,j}, M_{i+2,j}, M_{i-1,j-1}, M_{i,j-1}, M_{i+1,j-1}, M_{i,j-2})$
- 南向きのビュー: $V_{2,s} = (c_r, M_{i+2,j}, M_{i+1,j+1}, M_{i+1,j}, M_{i+1,j-1}, M_{i,j+2}, M_{i,j+1}, M_{i,j}, M_{i,j-1}, M_{i,j-2}, M_{i-1,j+1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j-1}, M_{i-2,j})$

- 西向きのビュー : $V_{2,w} = (c_r, M_{i,j-2}, M_{i+1,j-1}, M_{i,j-1}, M_{i-1,j-1}, M_{i+2,j}, M_{i+1,j}, M_{i,j}, M_{i-1,j}, M_{i-2,j}, M_{i+1,j+1}, M_{i,j+1}, M_{i-1,j+1}, M_{i,j+2})$
- 北向きのビューの鏡像 : $V_{2,\nu,\mu} = (c_r, M_{i-2,j}, M_{i-1,j+1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j-1}, M_{i,j+2}, M_{i,j+1}, M_{i,j}, M_{i,j-1}, M_{i,j-2}, M_{i+1,j+1}, M_{i+1,j}, M_{i+1,j-1}, M_{i+2,j})$
- 東向きのビューの鏡像 : $V_{2,e,\mu} = (c_r, M_{i,j+2}, M_{i+1,j+1}, M_{i,j+1}, M_{i-1,j+1}, M_{i+2,j}, M_{i+1,j}, M_{i,j}, M_{i-1,j}, M_{i-2,j}, M_{i+1,j-1}, M_{i,j-1}, M_{i-1,j-1}, M_{i,j-2})$
- 南向きのビューの鏡像 : $V_{2,s,\mu} = (c_r, M_{i+2,j}, M_{i+1,j-1}, M_{i+1,j}, M_{i+1,j+1}, M_{i,j-2}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i,j+2}, M_{i-1,j-1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j+1}, M_{i-2,j})$
- 西向きのビューの鏡像 : $V_{2,w,\mu} = (c_r, M_{i,j-2}, M_{i-1,j-1}, M_{i,j-1}, M_{i+1,j-1}, M_{i-2,j}, M_{i-1,j}, M_{i,j}, M_{i+1,j}, M_{i+2,j}, M_{i-1,j+1}, M_{i,j+1}, M_{i+1,j+1}, M_{i,j+2})$

ロボットが共通のキラリティに合意していれば, r は鏡像を除く 4 種類のビュー $V_{2,\nu}, V_{2,e}, V_{2,s}, V_{2,w}$ を得る. ロボットが共通のキラリティに合意していなければ, r は 8 種類全てのビューを得る.

$V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,\nu,\mu}$, $V_{\phi,e}$ と $V_{\phi,e,\mu}$, $V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,e,\mu}$, $V_{\phi,e}$ と $V_{\phi,s,\mu}$ ($\phi \in \{1,2\}$) の 4 種類のペアのいずれかに対して, そのペアを成している 2 種類のビューの値が一致するのであれば, r のビューは線対称である. このとき, ロボットが共通のキラリティに合意していないのであれば, 一致するビューに応じて, r が一意に区別できない方向のペアが存在する. このペアを成している 2 方向のどちらかに r が移動する場合, r がどちらに移動するかはスケジューラによって決められる. r が一意に区別できない場合がある方向のペアと, そのペアがあるときに一致しているビューとの対応を表 3 に示す. ここでは, r からノード $v_{i',j'}$ が見える方向を単に $v_{i',j'}$ 方向と呼んでいる. 表 3 の各行のビュー 2 種類が一致していることは, それらと同じ行にある方向のペアを r が一意に区別できないことの必要十分条件である. 例えば, $V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,\nu,\mu}$ が一致しているときに r が $v_{i,j-1}$ 方向と $v_{i,j+1}$ 方向のどちらかに移動するのであれば, r がどちらに移動するかはスケジューラによって決められる. なお, これらの一意に区別できない方向のペアが存在するとき, 表 3 にあるビューだけが一致しているわけではない. 例えば, $V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,\nu,\mu}$ が一致していれば, $V_{\phi,s}$ と $V_{\phi,s,\mu}$ も一致しているが, 簡単化のために表 3 では省略している.

表 3: 一意に区別できない場合がある方向のペアおよび一致するビューとの対応

一意に区別できない場合がある方向のペア	一致するビュー
$(v_{i,j-1}$ 方向, $v_{i,j+1}$ 方向)	$V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,\nu,\mu}$
$(v_{i-1,j}$ 方向, $v_{i+1,j}$ 方向)	$V_{\phi,e}$ と $V_{\phi,e,\mu}$
$(v_{i-1,j}$ 方向, $v_{i,j+1}$ 方向) と $(v_{i,j-1}$ 方向, $v_{i+1,j}$ 方向)	$V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,e,\mu}$
$(v_{i,j+1}$ 方向, $v_{i+1,j}$ 方向) と $(v_{i-1,j}$ 方向, $v_{i,j-1}$ 方向)	$V_{\phi,e}$ と $V_{\phi,s,\mu}$

$V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,h}$ ($h \in \{e, s, w\}$) が一致していれば, r のビューは回転対称である. このとき, ロボットが共通のキラリティに合意しているか否かに関わらず, r が一意に区別できない方向が存在する. $V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,e}$ が一致していなければ, $(v_{i-1,j}$ 方向, $v_{i+1,j}$ 方向) と $(v_{i,j-1}$ 方向, $v_{i,j+1}$ 方向) の 2 種類のペアが, 一意に区別できない方向のペアである. 各ペアを形作る 2 方向のどちらかに r が移動するのであれば, r がどちらに移動するかはスケジューラによって決められる. $V_{\phi,\nu}$ と $V_{\phi,e}$ が一致していれば, 4 方向全てを一意に区別できない. つまり, r が移動するのであれば, r が 4 方向のどれに移動するかはスケジューラによって決められる.

2.2 アルゴリズム

本論文ではアルゴリズムをルールの集合として記述する. 各ルールはラベルとガードとアクションの組合せで記述される. ラベルは各ルールをラベル付けしている. ガードはルールが実行可能となる条件であり, ロボットのビューで記述される. すなわち, ロボット r が直近の観測フェーズで得たビューのいずれかがアルゴリズム中のガードのいずれかに一致していれば, r はそのガードに対応するラベルのルールを実行可能である. ルールが実行可能であれば, ロボットは対応するアクションにしたがって計算フェーズと移動フェーズで色の変更や移動を行う. 直近の観測フェーズで得たビューが複数のガードと一致した場合, 対応するルールのいずれかがスケジューラによって選ばれ, 実行可能となる. 本論文で提案するアルゴリズムは, ビューが複数のガードと一致することがないように設

計されている。

2.3 実行

初期状況 C_0 からの実行は、任意の $j > 0$ に対して次の 3 つの条件を満たすような状況の極大列 $E = C_0, C_1, \dots$ で定義される。

1. $C_{j-1} \neq C_j$
2. C_j は C_{j-1} からいくつかのロボットが移動または色の変更をすることで得られる。
3. C_{j-1} から C_j までの間に移動または色の変更をする各ロボット r について、その移動や色の変更を自身のアルゴリズムと $C_{j'}$ でのビューに従って決定するような、状況のインデックス j' ($0 \leq j' < j$) が存在する。

極大という言葉は、その実行が無限に続くか終端状況 (terminal configuration) で終わるかのいずれかであることを意味する。終端状況とは、どのロボットもルールを実行可能とならないような状況である。

2.4 問題

問題 $\mathcal{P}$ は実行の集合として定義される。ある実行 E と問題 $\mathcal{P}$ について $E \in \mathcal{P}$ が成り立つならば、 E は $\mathcal{P}$ を解く。初期状況 C_0 からのアルゴリズム $\mathcal{A}$ の任意の実行が $\mathcal{P}$ を解くならば、 $\mathcal{A}$ は C_0 から $\mathcal{P}$ を解く。 $\mathcal{A}$ が C_0 から $\mathcal{P}$ を解くような初期状況 C_0 が存在することを、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$ を解く、と表記する。状況 C と問題 $\mathcal{P}$ について、初期状況 C から $\mathcal{P}$ を解くアルゴリズムが存在するならば、 C は $\mathcal{P}$ に対して可解である。

$C_s(\mathcal{P})$ を、 $\mathcal{P}$ に対して可解な全ての初期状況の集合とする。 $C_s(\mathcal{P})$ の任意の初期状況からアルゴリズム $\mathcal{A}$ が問題 $\mathcal{P}$ を解くとき、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$ に関して万能である、と表記する。つまり、万能なアルゴリズムは任意の可解な初期状況から $\mathcal{P}$ を解く。

本論文では、以下に定義する永続探索問題と停止探索問題を扱う。

定義 1. 永続探索は，全てのロボットが全てのノードを無限回訪問するような実行の集合である．

定義 2. 停止探索は，各ノードを少なくとも1体のロボットが訪問したうえで，終端状況で終わるような実行の集合である．

3. リング探索

3.1 記述形式に関する定義

3.1.1 部分状況

状況 $C = (M_0, \dots, M_{n-1})$ を考える. ロボットの色の多重集合の列 $C' = (M'_0, \dots, M'_{n'-1})$ について, 任意の i ($0 \leq i \leq n' - 1$) で $M_{x+i} = M'_i$ が成り立つような x が存在するとき, C' を C の部分状況 (sub-configuration) と呼ぶ. また, 部分状況 $C' = (M'_0, \dots, M'_{n'-1})$ を, M'_i の要素を第 i 列として順に並べることで記述することがある. すなわち, 任意の i ($0 \leq i \leq n' - 1$) について $M'_i = \{c_1^i, \dots, c_{|M'_i|}^i\}$ が成り立つとき, C' を以下の形式で記述する.

$$\begin{array}{ccccccc} & c_{|M'_0|}^0 & & c_{|M'_i|}^i & & & \\ c_{|M'_0|-1}^0 & c_{|M'_1|}^1 & \dots & c_{|M'_i|-1}^i & \dots & c_{|M'_{n'-1}|}^{n'-1} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ c_1^0 & c_1^1 & & c_1^i & & c_1^{n'-1} & \end{array}$$

$M'_i = \emptyset$ であれば, 第 i 列を $\emptyset$ と表記する. ロボットのいないノードが h 列連続して続くのであれば, $\emptyset$ を h 列記述する代わりに $\emptyset^h$ と表記することがある. 簡単化のため, C の部分状況 C' に全てのロボットが含まれるとき, C を表すために C の代わりに C' を使う. ロボットのビューを表すときにも同様に記述する.

3.1.2 探索アルゴリズムのルール

本論文では, リング探索アルゴリズムの各ルールを次の形式で記述する.

$$\mathcal{R}_{rule} : \begin{array}{ccccccc} & c_{0,m_0} & & c_{\phi,m_\phi} & & & \\ c_{-\phi,m_{-\phi}} & \dots & c_{0,m_0-1} & \dots & c_{\phi,m_\phi-1} & \dots & c_{new}, Movement \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ c_{-\phi,1} & & (c_{0,1}) & & c_{\phi,1} & & \end{array}$$

$\mathcal{R}_{rule}$ はルールのラベルである. 中央の部分はガードであり, ビュー $V = (c_{0,1}, M_{-\phi}, \dots, M_{-1}, M_0, M_1, \dots, M_\phi)$ ($\forall i \in \{-\phi, \dots, -1, 0, 1, \dots, \phi\}, M_i = \{c_{i,1}, \dots, c_{i,m_i}\}$) を表

す。直感的に言えば、各列は単一ノード上のロボットの色を表し、括弧内は自身の現在の色を表す。簡単化のため、ガードの表記にワイルドカード X を使う。第 i 列を X と表記するとき、 M_i の要素は任意である。また、 $M_i = \emptyset$ であるとき、第 i 列を $\emptyset$ と表記する。もし、 X が h 列連続して続くのであれば、 X を h 列書く代わりに X^h と書く。同様に、 $\emptyset$ が h 列連続して続くのであれば、 $\emptyset$ を h 列書く代わりに $\emptyset^h$ と書く。 h の表記に、ときどき変数 i が含まれる場合がある。この場合、 i の範囲をガードの右側に記述する。ロボット r の前方または後方のビューが V に一致すれば、 r はそのルールを実行可能である。このとき、 r は $c_{new}, Movement$ で表されるアクションを実行することができる。 c_{new} はロボットの新しい色を表し、 $Movement$ は移動を表す。 $Movement$ は $\perp, \leftarrow, \rightarrow, \leftarrow \vee \rightarrow$ のいずれかで表される。 $\perp$ は、ロボットが移動しないことを表す。 $\leftarrow$ は、ロボットの色の集合が M_{-1} であるノードへ移動することを表す。 $\rightarrow$ は、ロボットの色の集合が M_1 であるノードへ移動することを表す。 $\leftarrow \vee \rightarrow$ は、両隣のいずれかのノードへ移動することを表す（スケジューラが移動方向を決める）。ビュー V が対称であるとき、 $Movement$ は $\perp$ と $\leftarrow \vee \rightarrow$ のどちらかでなければならない。一例として、以下のルールを考える。

$$\mathcal{R}_{ex} : \quad \emptyset^{\phi-i-1} W \emptyset^i (W) X^\phi \overset{G}{(1 \leq i \leq \phi - 1)} :: G, \leftarrow$$

ロボット r は次の4点を満たしていれば、ルール $\mathcal{R}_{ex}$ を実行可能である。1) r の色が W である。2) 現在 r がいるノードには、色 G と色 W の2体のロボットだけが存在する。3) 2方向のどちらかに、 r との距離が2以上 ϕ 以下で色 W のロボット1体だけが存在するノードがある。4) 3点目の条件と同じ方向の他のノードは全て、ロボットのいないノードである。もし、 r がルール $\mathcal{R}_{ex}$ を実行可能であれば、 r は自身の色を G に変え、3, 4点目の条件と同じ方向の隣接ノードに移動する。

3.2 永続探索

本節では、2以上の任意の ϕ 、ライトの色数 $\ell = 2$ 、ロボット数 $k = 2$ に対する、 $n \geq 2\phi + 1$ のリングの永続探索アルゴリズムを提案する。なお、 $k = 1$ の場合は、

Algorithm 1 Asynchronous Perpetual Exploration for $\phi \geq 2, \ell = 2, k = 2$

Initial configurations

$$\begin{array}{c} W \\ G \end{array}, G \emptyset^i W, \text{ and } W \emptyset^i G \quad (0 \leq i \leq \phi - 1)$$
Rules

$$R1 : \begin{array}{c} G \\ \emptyset^\phi (W) \emptyset^\phi \end{array} :: W, \leftarrow \vee \rightarrow$$

$$R2 : \emptyset^\phi (W) G \emptyset^{\phi-1} :: W, \leftarrow$$

$$R3 : \emptyset^{\phi-i-1} W \emptyset^i (G) \emptyset^\phi \quad (1 \leq i \leq \phi - 1) :: G, \leftarrow$$

ロボットの移動方向がスケジューラによって決められるため永続探索を達成することができない．ライトの色の集合を $Col = \{G, W\}$ とする．提案アルゴリズムを Algorithm 1 に示す．初期状況では，色が異なる2体のロボットが連結である．ルール $R1$ と $R2$ から，ロボット間の距離が1以下のときは，色 W のロボットが色 G のロボットから離れるように移動する．ルール $R3$ から，ロボット間の距離が2以上のときは，色 G のロボットが色 W のロボットへ向かって移動する．これらのルールによって，2体のロボット間の距離はやがて1になり，以降これらのロボットは同じ方向へ交互に移動し続ける．したがって，2体のロボットは永続探索を達成でき，以下の定理が成り立つ．

定理 1. 2以上の任意の ϕ , $Col = \{G, W\}$, $k = 2$ という条件で， $n \geq 2\phi + 1$ のリングに対して，Algorithm 1 は初期状況 $\begin{array}{c} W \\ G \end{array}, G \emptyset^i W, W \emptyset^i G \quad (0 \leq i \leq \phi - 1)$ から非同期モデルで永続探索を解く．

次に，他の初期状況が完全同期モデルで非可解であることを示す．これにより，Algorithm 1 は2以上の任意の ϕ , $\ell = 2$, $k = 2$ に対する万能なアルゴリズムだといえることができる．この不可能性の証明のために，最初に補題1を証明する．状況 C について，ロボットがいるノードの集合を $V_r(C)$ と定義する．ロボットがいるノード v と，2つの隣接しているノードの集合 $T = \{v_i, v_{i+1}\}$ について， $v \in T$ であるとき， T を v にいるロボットのテリトリーと呼ぶ．テリトリー集合 $\mathcal{T}$ に属するあらゆるテリトリーのペア $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ について， T_1 の任意のノードと T_2 の

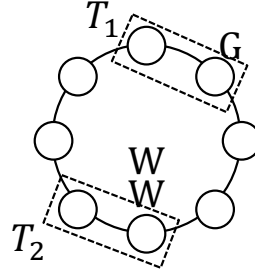


図 2: 独立なテリトリー集合の例 ($\phi = 2$)

任意のノードの距離が少なくとも $\phi + 1$ であるとき, $\mathcal{T}$ は独立であるという. 独立なテリトリー集合の例を図 2 に示す. 図中の W, G はそれぞれ色 W, G のロボットを表し, 点線で囲まれたノードのペア 2 つがテリトリー T_1, T_2 を表している. T_1 は色 G のロボットのテリトリーであり, T_2 は色 W の 2 体のロボットのテリトリーである. 加えて, T_1 の任意のノードと T_2 の任意のノードの距離は少なくとも $\phi + 1$ である.

補題 1. $V_r(C)$ の任意の 2 ノード間の距離が少なくとも $\phi + 1$ であり, 各ノード $v \in V_r(C)$ について, v にいるロボットは全員同じ色であるような状況 C を考える. もし, 以下の 2 点を満たすテリトリー集合 $\mathcal{T}$ が存在するのであれば, C から始まり, $v \in V_r(C)$ にいるロボットが $\mathcal{T}$ に属する自身のテリトリーから出ていけないような実行が, 完全同期, 半同期, 非同期モデルで存在する.

1. $\mathcal{T}$ は独立である.
2. $V_r(C)$ の各ノードが $\mathcal{T}$ のいずれかのテリトリーに属する.

証明. 条件を満たすテリトリー集合 $\mathcal{T}$ が存在する場合を考え, 帰納法によって証明する. 状況 C で各ロボットは各々のテリトリーにいる. 同様に各ロボットが各々のテリトリーにいる状況 C' を考える. 任意の 2 ロボット間の距離は少なくとも $\phi + 1$ だから, 各ロボットは他のノードにいるロボットを観測しない. これは, 各ロボットのビューが対称であり, スケジューラがその移動方向を決定できることを意味する. 加えて, 単一ノード上のロボットは全員が同じ色だから, スケジューラがそれらを同時に作動させるのであれば全員が同じ動作をする. 結果,

各ロボットが移動するのであれば、スケジューラは各ロボットのテリトリーのもう一方のノードにロボットを移動させることができる。つまり、各ロボットが自身のテリトリーにいる状況を維持することができる。したがって、補題が成り立つ。 $\square$

これから、Algorithm 1 に記載されている初期状況以外の状況が非可解であることを証明する。

補題 2. $n \geq 2\phi + 4$, $k = 2$ とする。2体のロボットが非連結である状況を C とおく。この場合、 C は完全同期モデルでの永続探索について非可解である。

証明. 状況 C での2体のロボット間の距離を d ($d \leq n/2$) とおく。一般性を失うことなく、 C でロボット r_1 がノード v_0 に、ロボット r_2 がノード v_d に位置していると仮定する。ロボットのテリトリー T_1 と T_2 を次のように定義する。

- もし $d = \phi + 1$ であれば, $T_1 = \{v_0, v_{n-1}\}, T_2 = \{v_d, v_{d+1}\}$
- もし $d > \phi + 1$ であれば, $T_1 = \{v_0, v_1\}, T_2 = \{v_d, v_{d+1}\}$

$\mathcal{T} = \{T_1, T_2\}$ は独立であるから、補題 1 より2体のロボットは $T_1 \cup T_2$ に含まれるノードのみを訪問する。したがって、ロボットは永続探索を達成することができない。 $\square$

補題 3. $n \geq 2\phi + 4$, $k = 2$ とする。2体のロボットの色が同じである状況を C とおく。この場合、 C は完全同期モデルでの永続探索について非可解である。

証明. 状況 C で2体のロボットは互いに対称なビューを得る。加えて、スケジューラは2体のロボットを同時に作動させることができる。よって、2体のロボットは常に同じ色を保持しており、移動するときは対称的に移動する。すなわち、各ロボットがもう一方のロボットに近づくように移動するか、そのロボットから離れるように移動するかのどちらかである。もし、互いに近づくように移動するのであれば、移動方向とは反対側にあるノードを訪問することができない。よって、探索を達成するためには、各ロボットはもう一方のロボットから離れるように移動しなければならない。この場合、やがて2体のロボットは非連結になる。補題

2と同様に、ロボットはこの非連結な状況から永続探索を達成することができない。□

補題 2,3 から、半同期、非同期モデルでも、2体のロボットが非連結か、あるいは同じ色を保持している状況は非可解である。定理 1 から、Algorithm 1 は完全同期、半同期モデルでも、2体のロボットが連結で異なる色 (G と W) を保持している初期状況から永続探索を解く。したがって、以下の定理が成り立つ。

定理 2. 完全同期モデル、半同期モデル、非同期モデルにおいて、2以上の任意の ϕ , $Col = \{G, W\}$, $k = 2$ という条件での $n \geq 2\phi + 4$ のリングの永続探索に対して、Algorithm 1 は万能なアルゴリズムである。

3.3 停止探索

3.3.1 ロボット 2 体での不可能性

本項では、ロボット数 $k = 2$ に対して完全同期モデルで停止探索を解くアルゴリズムが存在しないことを示す。

定理 3. 完全同期モデルにおいて、 $k = 2$ に対して停止探索を解くアルゴリズムは存在しない。これは、ライトの色数が無限であっても成り立つ。

証明. 背理法を使う。 $k = 2$ に対して停止探索を解くアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在すると仮定する。サイズ $n_1 \geq 2\phi + 4$ のリング R_1 での $\mathcal{A}$ の実行 $E = C_0, C_1, \dots$ を考える。 i を、 C_i で 2体のロボットが停止するか非連結になるような最小のインデックスとする。次に、サイズ $n_2 > 2(i + 1)$ のリング R_2 での $\mathcal{A}$ の実行 $E' = C'_0, C'_1, \dots$ を考える。2体のロボットが連結な状況を維持している限り、ロボットは R_1 と R_2 の違い (リングの大小) を認識できない。結果、 E' において、ロボットは C'_i まで E と同様に動く。もし、ロボットが C'_i で停止するのであれば、高々 $2(i + 1)$ 個のノードしか訪問していないため、探索を達成できない。もし、ロボットが C'_i で非連結になるのであれば、独立なテリトリ集合を C'_i で定義することができる。補題 1 より、2体のロボットは残りのノードを訪問できず、探索を達成できない。これは矛盾である。□

Algorithm 2 Asynchronous Terminating Exploration for $\phi \geq 2, \ell = 2, k = 3$

Initial configurations
 $W \emptyset^i W \emptyset^j G$ and $G \emptyset^i W \emptyset^j W$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$)

Rules
 $R1 : X^{\phi-i-1} W \emptyset^i (G) X^\phi \ (1 \leq i \leq \phi - 1) :: G, \leftarrow$
 $R2 : X^{\phi-i-1} W \emptyset^i (W) G X^{\phi-1} \ (1 \leq i \leq \phi - 1) :: W, \leftarrow$
 $R3 : X^{\phi-1} W (W) G X^{\phi-1} :: G, \perp$
 $R4 : \emptyset^\phi (W) G X^{\phi-1} :: W, \leftarrow$

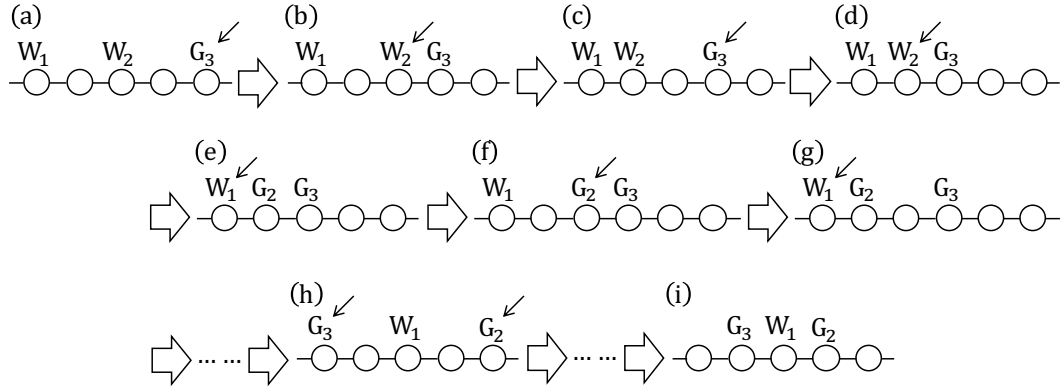


図 3: Algorithm 2 の実行例 ($\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$)

3.3.2 ロボット 3 体でのアルゴリズム

本項では、2 以上の任意の ϕ ，ライトの色数 $\ell = 2$ ，ロボット数 $k = 3$ に対する、 $n \geq 3\phi + 1$ のリングの停止探索アルゴリズムを提案する．ライトの色の集合を $Col = \{G, W\}$ とする．提案アルゴリズムを Algorithm 2 に示す．初期状況では、色 G のロボットが 1 体いて、そのロボットから見て同じ方向に 2 体の色 W のロボットがいる．加えて、3 体のロボットは連結であり、タワーは存在しない．

$\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$ に対する Algorithm 2 の実行例を図 3 に示す．図 3 において、 W_i, G_i はそれぞれ、色 W のロボット r_i ，色 G のロボット r_i を表す．矢印は、その矢印が指すロボットをスケジューラが作動させていることを表す．図 3 を参照しながら、2 以上の任意の ϕ に対する Algorithm 2 の実行過程を述べる．初期

状況 $W\emptyset^i W\emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi-1$, $0 \leq j \leq \phi-1$) を考え、この状況を形作るロボットを左端から順に r_1, r_2, r_3 と名付ける (図 3(a)). r_3 は自身と r_2 との距離が 2 以上のとき、ルール $R1$ によって r_2 へ向かって移動する. 色 W のロボットは自身と色 G のロボットが隣り合っている状況でしか動かないから、 r_3 が r_2 へ向かって移動している間、他のロボットは動かない. 結果、状況は $W\emptyset^i WG$ になる (図 3(b)). この状況から、 r_2 はルール $R2$ によって r_1 に近づく方向へ移動し、状況は $W\emptyset^{i-1} W\emptyset G$ になる (図 3(c)). この状況から、 r_3 はルール $R1$ によって r_2 へ向かって移動し、状況は $W\emptyset^{i-1} WG$ になる (図 3(d)). 以降、状況が WWG になるまで、 r_2 と r_3 が移動を繰り返す. 状況 WWG から、 r_2 がルール $R3$ によって自身の色を G に変え、状況は WGG になる (図 3(e)). この状況から、 r_1 はルール $R4$ によって r_2 から離れる方向へ移動し、状況は $W\emptyset GG$ になる (図 3(f)). この状況から、 r_2 はルール $R1$ によって r_1 へ向かって移動し、状況は $WG\emptyset G$ になる (図 3(g)). 以降、 r_1 と r_2 が一方向へ移動を繰り返してリングを探索する. やがて r_1 と r_2 は r_3 に反対側から近づき、状況は $G\emptyset^{\phi-1} W\emptyset G$ になる (図 3(h)). この状況から、 r_2 と r_3 がルール $R1$ によって r_1 へ向かって移動する. 色 G のロボットが両方向に見えるロボットが実行可能なルールはないから、 r_2 と r_3 が移動している間、 r_1 は移動しない. 結果、状況は GWG になる (図 3(i)). 状況 GWG からルールを実行できるロボットは存在しないから、ロボットは停止する.

このようにして、Algorithm 2 は停止探索を達成する. したがって、以下の定理が成り立つ.

定理 4. 2 以上の任意の ϕ , $Col = \{G, W\}$, $k = 3$ という条件で、 $n \geq 3\phi+1$ のリングに対して、Algorithm 2 は初期状況 $W\emptyset^i W\emptyset^j G, G\emptyset^i W\emptyset^j W$ ($0 \leq i \leq \phi-1, 0 \leq j \leq \phi-1$) から非同期モデルで停止探索を解く.

加えて、Algorithm 2 における G と W の役割を入れ替えることで、もう 1 つアルゴリズムを作ることができる. このアルゴリズムは、Algorithm 2 の可解な初期状況の G と W を入れ替えた状況から停止探索を解く. すなわち、状況 $G\emptyset^i G\emptyset^j W, W\emptyset^i G\emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi-1, 0 \leq j \leq \phi-1$) もまた可解である. したがって、以下の補題が成り立つ.

補題 4. 2 以上の任意の ϕ , $Col = \{G, W\}$, $k = 3$ に対する非同期モデルでの停止探索について, 状況 $W \emptyset^i W \emptyset^j G, G \emptyset^i W \emptyset^j W, G \emptyset^i G \emptyset^j W, W \emptyset^i G \emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) は可解である.

3.3.3 万能なアルゴリズムが存在しないことの証明

本項では, 2 以上の任意の ϕ , ライトの色数 $\ell = 2$, ロボット数 $k = 3$ での停止探索に対する万能なアルゴリズムが存在しないことを示す. すなわち, この条件での停止探索に対して, 可解な状況全てに対応するアルゴリズムは存在しないことを示す.

定理 5. 完全同期モデル, 半同期モデル, 非同期モデルにおいて, 2 以上の任意の ϕ , $\ell = 2$, $k = 3$ という条件でのリングの停止探索に対する万能なアルゴリズムは存在しない.

証明の概略を述べる. 全ロボットが連結でタワーの存在しない初期状況の集合を C_S とおく. 初めに, 非同期モデルにおいて, C_S に属する初期状況全てが可解であることを示す. 次に, 完全同期モデルにおいて, C_S に属する初期状況全てから停止探索を解くようなアルゴリズムが存在しないことを示す. この結果から, 半同期モデルと非同期モデルにおいても, そのようなアルゴリズムは存在しない. したがって, 完全同期モデル, 半同期モデル, 非同期モデルのいずれの場合も, 万能なアルゴリズムは存在しない.

2 以上の任意の ϕ , $Col = \{G, W\}$, $k = 3$ に対する停止探索について, 全てのロボットが連結でタワーの存在しない初期状況が全て可解であることを示す. このような初期状況の集合 C_S を次のように表す.

$$C_S = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$C_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq \phi-1, 0 \leq j \leq \phi-1} \{W \emptyset^i W \emptyset^j G, G \emptyset^i W \emptyset^j W, G \emptyset^i G \emptyset^j W, W \emptyset^i G \emptyset^j G\}$$

$$C_2 = \bigcup_{0 \leq i \leq \phi-1, 0 \leq j \leq \phi-1} \{G \emptyset^i W \emptyset^j G, W \emptyset^i G \emptyset^j W\}$$

$$C_3 = \bigcup_{0 \leq i \leq \phi-1, 0 \leq j \leq \phi-1} \{G \emptyset^i G \emptyset^j G, W \emptyset^i W \emptyset^j W\}$$

Algorithm 3 Asynchronous Terminating Exploration for $\phi \geq 2, \ell = 2, k = 3$

Initial configurations

$$G \emptyset^i W \emptyset^j G \quad (0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1)$$

Rules

$$R1 : \quad X^{\phi-i-1} W \emptyset^i (G) \emptyset^2 X^{\phi-2} \quad (1 \leq i \leq \phi - 1) :: G, \leftarrow$$

$$R2 : \quad \emptyset^{\phi-1} G (W) G \emptyset^{\phi-1} :: G, \perp$$

$$R3 : \quad \emptyset^\phi (G) G G \emptyset^{\phi-2} :: W, \perp$$

$$R4 : \quad \emptyset^\phi (G) G W \emptyset^{\phi-2} :: W, \perp$$

$$R5 : \quad X^{\phi-2} \emptyset^2 (W) G W X^{\phi-2} :: W, \leftarrow$$

$$R6 : \quad X^{\phi-2} W \emptyset (G) \emptyset W X^{\phi-2} :: G, \leftarrow \vee \rightarrow$$

$$R7 : \quad \emptyset^\phi (W) G \emptyset X^{\phi-2} :: W, \leftarrow$$

$$R8 : \quad X^{\phi-i-1} W \emptyset^i (W) G \emptyset X^{\phi-2} \quad (1 \leq i \leq \phi - 1) :: W, \leftarrow$$

C_1 に属する初期状況は補題 4 より可解である。以後、残りの初期状況に対応する停止探索アルゴリズムを示す。

C_2 に対応するアルゴリズム $n \geq 3\phi + 1$ のリングで初期状況 $G \emptyset^i W \emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) から停止探索を解くアルゴリズムを Algorithm 3 に示す。 $\phi = 2$ に対する Algorithm 3 の実行例を図 4 に示す。図 4 において、 W_i, G_i はそれぞれ、色 W のロボット r_i , 色 G のロボット r_i を表す。矢印は、その矢印が指すロボットをスケジューラが作動させていることを表す。図 4 を参照しながら、2 以上の任意の ϕ に対する Algorithm 3 の実行過程を述べる。初期状況 $G \emptyset^i W \emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) を考え、この状況を形作るロボットを左端から順に r_1, r_2, r_3 と名付ける (図 4(a)). r_1 と r_3 は自身と r_2 との距離が 2 以上のとき、ルール $R1$ によって r_2 へ向かって移動する (図 4(b)). r_2 と他のどちらかのロボットとの距離が 2 以上であれば、他に適用されるルールはない。結果、状況は GWG になる (図 4(c)). この状況から、 r_2 はルール $R2$ によって自身の色を G に変え、状況は GGG になる (図 4(d)). この状況では、 r_1 と r_3 はルール $R3$ によって自身の色を W に変えることができる。非同期モデルでは r_1 と r_3 が異なる時刻で LCM サイクルを実行するかもしれないことに注意する。両方のロボットが同時にルー

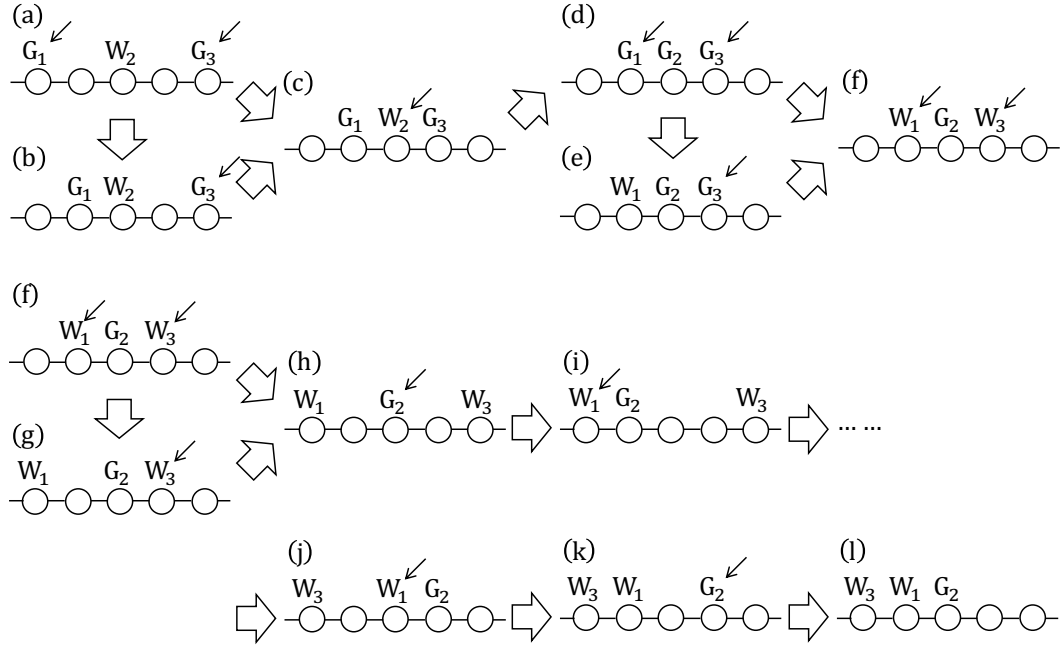


図 4: Algorithm 3 の実行例 ($\phi = 2$, $n \geq 3\phi + 1$)

ル $R3$ を実行した場合、状況は $WG W$ になる (図 4(f)). 片方のロボット (一般性を失うことなく, r_1 とする) が先にルール $R3$ を実行した場合、状況は WGG になる (図 4(e)). 状況 WGG では, r_3 のみがルールを実行できる. r_1 が色を変える前に r_3 が観測フェーズを実行していれば, r_3 はルール $R3$ を実行する. r_1 が色を変えた後に r_3 が観測フェーズを実行していれば, r_3 はルール $R4$ を実行する. どちらの場合も状況は結局 $WG W$ になる. この状況では, r_1 と r_3 はルール $R5$ によって移動することができる. 両方が同時にルール $R5$ を実行した場合、状況は $W\emptyset G\emptyset W$ になる (図 4(h)). r_1 が r_3 より前にルール $R5$ を実行した場合、状況は $W\emptyset GW$ になる (図 4(g)). 状況 $W\emptyset GW$ では, r_3 のみがルールを実行できる. r_1 が移動する前に r_3 が観測フェーズを実行していれば, r_3 はルール $R5$ を実行する. r_1 が移動した後に r_3 が観測フェーズを実行していれば, r_3 はルール $R7$ を実行する. どちらの場合も状況は結局 $W\emptyset G\emptyset W$ になる. この状況から, r_2 がルール $R6$ によって移動し, 状況は $WG\emptyset\emptyset W$ (図 4(i)) または $W\emptyset\emptyset GW$ になる. これらの状況は互いに対称であるから, どちらの状況からもロボットは同じ方法で移動す

Algorithm 4 Asynchronous Terminating Exploration for $\phi \geq 2, \ell = 2, k = 3$

Initial configurations

$$G \emptyset^i G \emptyset^j G \quad (0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1)$$

Rules

$$R1: \quad X^{\phi-i-1} G \emptyset^i (G) \emptyset^\phi \quad (1 \leq i \leq \phi - 1) :: G, \leftarrow$$

$$R2: \quad X^\phi (G) G G X^{\phi-2} :: W, \perp$$

$$R3: \quad X^\phi (G) G W X^{\phi-2} :: W, \perp$$

$$R4: \quad X^{\phi-2} \emptyset^2 (W) G W X^{\phi-2} :: W, \leftarrow$$

$$R5: \quad X^{\phi-2} \emptyset^2 (W) G \emptyset X^{\phi-2} :: W, \leftarrow$$

$$R6: \quad X^{\phi-2} W \emptyset (G) \emptyset X^{\phi-1} :: G, \leftarrow$$

$$R7: \quad X^{\phi-2} W \emptyset (W) G \emptyset X^{\phi-2} :: W, \leftarrow$$

る。ここでは、状況 $W G \emptyset \emptyset W$ からのロボットの移動を考える。この状況から、 r_1 がルール $R7$ によって r_2 から離れる方向に移動する。その後、 r_1 と r_2 はルール $R7$ と $R1$ によって同じ方向へ移動し続ける。 r_1 と r_2 がリングを探索した後、状況は $W \emptyset^{\phi-1} W G$ になる (図 4(j))。この状況から、 r_1 はルール $R8$ によって r_3 へ向かって移動し、状況は $W \emptyset^{\phi-2} W \emptyset G$ になる (図 4(k))。この状況から、 r_2 はルール $R1$ によって r_1 へ向かって移動する。その後、状況が $W W G$ (図 4(l)) になるまで、 r_1 と r_2 はルール $R8$ と $R1$ によって同じ方向へ移動し続ける。状況 $W W G$ からルールを実行できるロボットは存在しないから、ロボットは停止する。

加えて、Algorithm 3 における G と W の役割を入れ替えることで、もう 1 つアルゴリズムを作ることができる。このアルゴリズムは、Algorithm 3 の可解な初期状況の G と W を入れ替えた状況から停止探索を解く。すなわち、状況 $W \emptyset^i G \emptyset^j W$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) もまた可解である。したがって、 C_2 に含まれる初期状況は可解である。

C_3 に対応するアルゴリズム $n \geq 3\phi + 1$ のリングで初期状況 $G \emptyset^i G \emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) から停止探索を解くアルゴリズムを Algorithm 4 に示す。 $\phi = 2$ に対する Algorithm 4 の実行例を図 5 に示す。図 5 において、 W_i, G_i はそれぞれ、色 W のロボット r_i 、色 G のロボット r_i を表す。矢印は、その矢印が指すロ

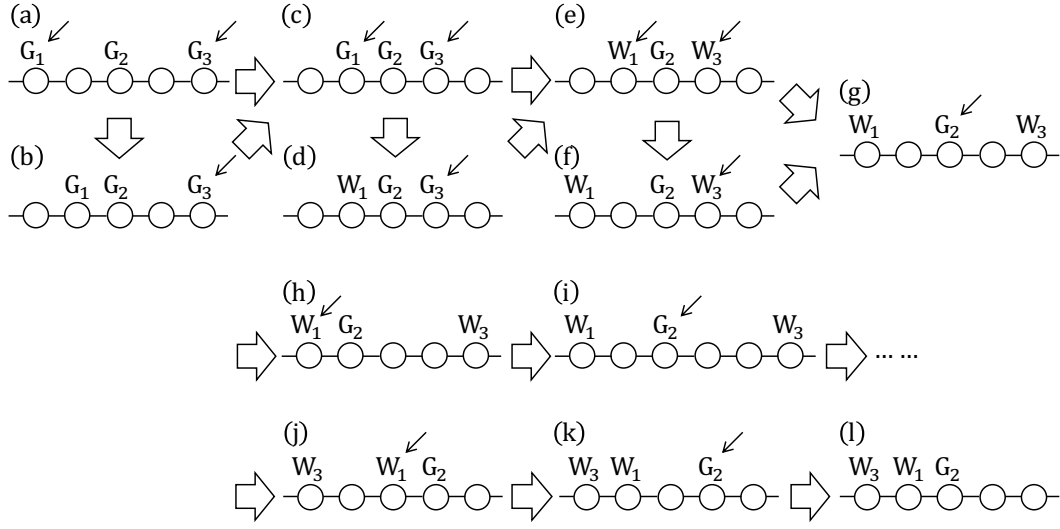


図 5: Algorithm 4 の実行例 ($\phi = 2, n \geq 3\phi + 1$)

ボットをスケジューラが作動させていることを表す。図 5 を参照しながら、2 以上の任意の ϕ に対する Algorithm 4 の実行過程を述べる。初期状況 $G \emptyset^i G \emptyset^j G$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) を考え、この状況を形作るロボットを左端から順に r_1, r_2, r_3 と名付ける (図 5(a))。 r_1 と r_3 は自身と r_2 との距離が 2 以上のとき、ルール $R1$ によって r_2 へ向かって移動する (図 5(b))。色が W のロボットがいらないから、状況が $G G G$ (図 5(c)) になるまで他に適用されるルールはない。状況 $G G G$ では、 r_1 と r_3 はルール $R2$ によって自身の色を W に変えることができる。両方のロボットが同時にルール $R2$ を実行した場合、状況は $W G W$ になる (図 5(e))。 r_1 が r_3 より前にルール $R2$ を実行した場合、状況は $W G G$ になる (図 5(d))。状況 $W G G$ では、 r_3 のみがルールを実行できる。 r_1 が色を変える前に r_3 が観測フェーズを実行していれば、 r_3 はルール $R2$ を実行する。 r_1 が色を変えた後に r_3 が観測フェーズを実行していれば、 r_3 はルール $R3$ を実行する。どちらの場合も状況は結局 $W G W$ になる。この状況では、 r_1 と r_3 はルール $R4$ によって r_2 から離れる方向に移動することができる。両方のロボットが同時にルール $R4$ を実行した場合、状況は $W \emptyset G \emptyset W$ になる (図 5(g))。 r_1 が r_3 より前にルール $R4$ を実行した場合、状況は $W \emptyset G W$ になる (図 5(f))。状況 $W \emptyset G W$ では、 r_3 のみがルールを実行

できる． r_1 が移動する前に r_3 が観測フェーズを実行していれば， r_3 はルール $R4$ を実行する． r_1 が移動した後に r_3 が観測フェーズを実行していれば， r_3 はルール $R5$ を実行する．どちらの場合も状況は結局 $W\emptyset G\emptyset W$ になる．この状況から， r_2 がルール $R6$ によって移動する．一般性を失うことなく， r_2 が r_1 へ向かって移動すると仮定する．結果，状況は $WG\emptyset\emptyset W$ になる (図 4(h))．この状況から， r_1 がルール $R5$ によって r_2 から離れる方向に移動し，状況は $W\emptyset G\emptyset\emptyset W$ になる (図 4(i))．この状況から， r_2 がルール $R6$ によって r_1 へ向かって移動する．以降， r_1 と r_2 がルール $R5$ と $R6$ によって同じ方向へ移動し続ける． r_3 の色が W であり，色 W のロボットは隣接しているノードに色 G のロボットが見えているときしか実行できるルールを持たないから， r_1 と r_2 がリングを探索している間 r_3 はルールを実行しない． r_1 と r_2 がリングを探索した後，状況は $W\emptyset WG$ になる (図 5(j))．この状況から， r_1 がルール $R7$ によって r_3 へ向かって移動し，状況は $WW\emptyset G$ になる (図 5(k))．この状況から， r_2 がルール $R6$ によって r_1 へ向かって移動し，状況は WWG になる (図 5(l))．このからルールを実行できるロボットは存在しないから，ロボットは停止する．

加えて，Algorithm 4 における G と W の役割を入れ替えることで，もう 1 つアルゴリズムを作ることができる．このアルゴリズムは，Algorithm 4 の可解な初期状況の G と W を入れ替えた状況から停止探索を解く．すなわち，状況 $W\emptyset^i W\emptyset^j W$ ($0 \leq i \leq \phi - 1, 0 \leq j \leq \phi - 1$) もまた可解である．したがって， C_3 に含まれる初期状況は可解である．

以上の議論から C_1, C_2, C_3 に属する初期状況は全て可解であり，以下の補題が成り立つ．

補題 5. 非同期モデルにおいて，2 以上の任意の ϕ ， $\ell = 2$ ， $k = 3$ という条件での $n \geq 3\phi + 1$ のリングの停止探索について，全てのロボットが連結でタワーの存在しない初期状況，すなわち， C_S に属する初期状況は全て可解である．

C_S の状況全てに対応するアルゴリズムが存在しないことの証明 補題 5 では， C_S に属する状況が全て非同期モデルで可解であることを証明した．次の補題で，たとえ完全同期モデルであっても， C_S に属する状況全てから停止探索を解くよう

な単一のアルゴリズムは存在しないことを証明する。

補題 6. 完全同期モデルにおいて、 C_S に属する初期状況のどれからも停止探索を解くようなアルゴリズムは存在しない。

補題 6 を背理法によって証明するため、そのようなアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在すると仮定する。サイズ $n \geq 3\phi + 3$ のリング R_1 での、初期状況 $C_0 \in C_S$ から始まる $\mathcal{A}$ の実行 $E = C_0, C_1, \dots$ を考える。一般性を失うことなく、 C_0 でロボット r_1, r_2, r_3 がそれぞれノード v_0, v_x ($0 < x \leq \phi$), v_y ($x < y \leq x + \phi$) に位置しているとする。ノード v_i から v_{i-1} へ向かう方向を左方向、 v_i から v_{i+1} へ向かう方向を右方向と定義する。 C_0 では、全ロボットが v_0 から v_y までのノードのいずれかに位置しており、 v_0, v_y がそれぞれ左端ノード、右端ノードとして扱われる。直感的には、左端ノード上のロボットの左方向への移動と右方向への移動それぞれに合わせて、左端ノードも左方向や右方向に移動する。右端ノードについても同様である。形式的には、状況 C_i での左端ノード $L(i)$ と右端ノード $R(i)$ は次のとおり定義される。

- C_0 で、 $L(i)$ は v_0 , $R(i)$ は v_y である。
- C_i ($i > 0$) での $L(i)$ は、 C_{i-1} での左端ノード $v_L = L(i-1)$ から定義される。もし、 C_{i-1} から C_i の間に少なくとも 1 体のロボットが v_L から v_{L-1} へ移動するのであれば、 $L(i)$ は v_{L-1} である。そうでない場合、あるロボットが C_i で v_L に位置しているのであれば、 $L(i)$ は v_L である。そうでない場合（つまり、 C_{i-1} から C_i の間に v_L 上の全ロボットが v_{L+1} に移動し、どのロボットも v_{L+1} から v_L に移動しないのであれば）、 $L(i)$ は v_{L+1} である。
- C_i ($i > 0$) での $R(i)$ は、 C_{i-1} での右端ノード $v_R = R(i-1)$ から定義される。もし、 C_{i-1} から C_i の間に少なくとも 1 体のロボットが v_R から v_{R+1} へ移動するのであれば、 $R(i)$ は v_{R+1} である。そうでない場合、あるロボットが C_i で v_R に位置しているのであれば、 $R(i)$ は v_R である。そうでない場合、 $R(i)$ は v_{R-1} である。

各状況 C_i で左端ノードにいるロボットと右端ノードにいるロボットをそれぞれ、左端ロボット、右端ロボットと定義する。以降、 C_S に属するどの状況につい

ても、その状況から始まり C_S に属する状況に再び到達するような実行が存在することを証明する。これは、 A の実行が終端状況に到達せず停止探索を解けないことを意味する。この証明のために、 $C_0 \in C_S$ から始まり以下の条件を満たす実行 $E = C_0, C_1, \dots$ を考える。

- もし、左端ロボットが対称なビューを得ている状態で移動するのであれば、スケジューラはそのロボットを右方向に移動させる。
- もし、右端ロボットが対称なビューを得ている状態で移動するのであれば、スケジューラはそのロボットを左方向に移動させる。

直感的に言えば、スケジューラは左端ロボットが右端ロボットを左方向に観測しないように（右端ロボットが左端ロボットを右方向に観測しないように）ロボットを移動させようとする。この振る舞いの下であっても、以下の補題が成り立つ。

補題 7. C_{i_c} で左端ロボットが右端ロボットを左方向に観測するようなインデックス i_c が存在する。

証明. 背理法による証明のため、そのようなインデックスが存在しないと仮定する。 i を、 C_i が E の終端状況であるようなインデックスとする。次に、サイズ $n' > 3(t+1)$ のリング R_2 において、3体のロボットが C'_0 で C_0 と同じ部分状況を構成するような A の実行 $E' = C'_0, C'_1, \dots$ を考える。仮定より、左端ロボットは右端ロボットを左方向に観測しないから、ロボットは R_1 と R_2 の違いを認識できない。結果、 E' でロボットは E と同様に動き、 C'_i が E' の終端状況になる。状況が C'_i になるまでに3体のロボットが訪問できるノードは高々 $3(i+1)$ 個であるから、ロボットは探索を達成することができない。これは矛盾である。□

i'_c を、 $C_{i'_c}$ で左端ロボットが右端ロボットを左方向に観測するような最小のインデックスとする。次の2つの補題を証明することで、 $C_{i'_c}$ が C_S に含まれることを示す。

補題 8. $C_{i'_c}$ で全ロボットが連結である。

証明. 背理法から, C_{i_c} で全ロボットが連結ではないと仮定する. C_{i_c} では左端ロボットと右端ロボットが連結であるから, 残りのロボットは C_{i_c} で孤立している. サイズ $n' \geq n + 3$ のリング R_2 において, 3体のロボットが C'_0 で C_0 と同じ部分状況を構成するような $\mathcal{A}$ の実行 $E' = C'_0, C'_1, \dots$ を考える. 状況が C_{i_c-1} になるまでの間, 左端ロボットは右端ロボットを左方向に観測しないから, 3体のロボットは R_1 と R_2 の違いを認識できない. 結果, E' において, ロボットは C'_{i_c-1} まで E と同様に動く. $n' \geq n + 3$ だから, C_{i_c} で左端ロボットと右端ロボットの距離は少なくとも $\phi + 2$ である. 加えて, 残りのロボットは C_{i_c} で孤立している. こうして, C_{i_c} で独立なテリトリ集合を定義することができる. 補題1より, 3体のロボットは残りのノードを訪問できず, 探索を達成できない. これは矛盾である. $\square$

補題 9. C_{i_c} にタワーは存在しない.

証明. 状況 C_{i_c-1} , つまり, 左端ロボットが右端ロボットを左方向に観測する直前の状況を考える. ロボットは3体のみ存在し, $n \geq 3\phi + 3$ であるから, 左端ロボットと右端ロボットのどちらかは C_{i_c-1} で孤立している.

右端ロボットを r とおき, r が孤立している場合を考える. 左端ロボットが孤立している場合も同様に証明できる. C_{i_c-1} で r のビューは対称であるから, スケジューラはその移動方向を E が満たす条件にしたがって決める. つまり, r が移動するのであれば, スケジューラは r を左方向に移動させる. しかしながら, r が左方向に移動するのであれば, C_{i_c} で左端ロボットは r を左方向に見ることができない. よって, r は C_{i_c-1} で移動しない. こうして, C_{i_c-1} から C_{i_c} までの間に左端ロボットが左方向へ移動しなければならない. さもないと, C_{i_c} で左端ロボットは r を左方向に観測することができない. もし, 左端ロボットが C_{i_c-1} でタワーを作っているのであれば, C_{i_c-1} でそれらのロボットのビューは対称であるから, スケジューラはその移動方向を E が満たす条件にしたがって決める. つまり, それらのロボットが移動するのであればスケジューラが右方向に移動させ, 結果, C_{i_c} で左端ロボットは r を左方向に観測することができない. ゆえに, C_{i_c-1} にタワーは存在しない. C_{i_c-1} から C_{i_c} までの間に左端ロボットが左方向へ移動するから, そのロボットは C_{i_c} でタワーを作らない. 加えて, C_{i_c-1} で r が孤

立しているから、 r は C_{i_c} でタワーを作らない。したがって、 C_{i_c} にタワーは存在しない。□

補題 8,9 から、完全同期モデルにおいて、 C_S に属する初期状況全てから停止探索を解くアルゴリズム A の実行中に、 C_S に属する状況が再び発生する。これは、 A の実行が終端状況に到達せず、停止探索を解くことができないことを意味する。したがって、補題 6 が成り立つ。

補題 6 は、半同期、非同期モデルにおいても、 C_S に属する初期状況全てから停止探索を解くアルゴリズムが存在しないことを示している。加えて、補題 5 から、完全同期、半同期、非同期モデルにおいて、 C_S に属する状況は全て可解である。これは、完全同期、半同期、非同期モデルにおいて、可解な初期状況全てから停止探索を解くアルゴリズムは存在しないことを意味する。したがって、定理 5 が成り立つ。

4. グリッド探索

4.1 必要なロボット数の下界

4.1.1 準備

次数が3以下のノードを端ノードと呼ぶ. 全ての端ノードとの距離が少なくとも ϕ であるノードの集合をグリッドの内側と呼ぶ. グリッドの内側のノードにいるロボットは, そのビューに $\perp$ が含まれないから, 他のノードのロボットを観測することなく移動方向を一意に決めることはできない. 加えて, 全ての端ノードとの距離が少なくとも $2\phi+2$ であるノードの集合をグリッドの超内側と呼ぶ.

3.2節と同様に独立なテリトリー集合を定義する. 状況 C について, ロボットがいるノードの集合を $V_r(C)$ と定義する. ロボットがいるノード v と, 2つの隣接しているノードの集合 T について, $v \in T$ であるとき, T を v にいるロボットのテリトリーと呼ぶ. テリトリー集合 $\mathcal{T}$ に属するあらゆるテリトリーのペア $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ について, T_1 の任意のノードと T_2 の任意のノードの距離が少なくとも $\phi+1$ であるとき, $\mathcal{T}$ は独立である.

補題 10. $V_r(C)$ の任意の2ノード間の距離が少なくとも $\phi+1$ であり, 各ノード $v \in V_r(C)$ について, v にいるロボットは全員同じ色であるような状況 C を考える. もし, 以下を満たすテリトリー集合 $\mathcal{T}$ が存在するのであれば, C から始まり, $v \in V_r(C)$ にいるロボットが $\mathcal{T}$ に属する自身のテリトリーから出ていけないような実行が, 完全同期, 半同期, 非同期モデルで存在する.

1. $\mathcal{T}$ は独立である.
2. $V_r(C)$ の各ノードが $\mathcal{T}$ のいずれかのテリトリーに属する.
3. 各テリトリー $T \in \mathcal{T}$ について, T に含まれるノードは全てグリッドの内側に含まれる.

証明. 条件を満たすテリトリー集合 $\mathcal{T}$ が存在する場合を考え, 帰納法によって証明する. 状況 C で各ロボットは各々のテリトリーにいる. 同様に各ロボットが各々のテリトリーにいる状況 C' を考える. 任意の2ロボット間の距離は少なくとも

$\phi + 1$ だから、各ロボットは他のノードにいるロボットを観測しない。また、各ロボットがいるノードはグリッドの内側に含まれている。したがって、各ロボットのビューは回転対称であり、スケジューラがロボットの移動方向を決定することができる。加えて、スケジューラが単一ノード上のロボットを全員同時に作動させるのであれば、そのノードにいるロボットは全員が同じ色だから、全員が同じ動作をする。結果、各ロボットは、移動するのであれば自身のテリトリーのもう一方のノードに移動する。つまり、各ロボットが自身のテリトリーにいる状況が維持される。したがって、補題が成り立つ。□

4.1.2 ロボット 1 体での不可能性

本項では、次の定理 6 を証明する。定理 6 より、本論文で考える条件のグリッド探索（永続探索・停止探索）を達成するには少なくとも 2 体のロボットが必要である。

定理 6. 完全同期モデルにおいて、 $k = 1$ の場合に永続探索・停止探索を解くアルゴリズムは存在しない。これは、ライトの色数やキラリティに対する合意の有無に関わらず成り立つ。

証明. $m \times n$ グリッド ($m \geq 2\phi + 1$, $n \geq 2\phi + 3$) の探索を考える。このグリッドの内側には少なくとも 3 個のノードが存在し、ロボットが探索を達成するためにはこれらを全て訪問する必要がある。しかしながら、ロボットが一度グリッドの内側のノードを訪問したのであれば、そのノードおよび隣接しているグリッドの内側のノードによって、補題 10 と同様にロボットが出ていけないようなテリトリーを定義できる。よって、ロボットはグリッドの内側のノードを高々 2 個しか訪問できず、探索を達成できない。□

4.1.3 ϕ が定数かつ 1 色のロボット 2 体での不可能性

本項では、次の定理 7 を証明する。定理 7 より、完全同期モデルにおいて、 ϕ が定数かつライトが 1 色である場合にグリッド探索を達成するには少なくとも 3 体のロボットが必要である。

定理 7. 完全同期モデルにおいて, ϕ が定数で, $\ell = 1, k = 2$ の場合に永続探索・停止探索を解くアルゴリズムは存在しない. これは, キラリティに対する合意の有無に関わらず成り立つ.

定理 7 を背理法を使って証明する. ϕ が定数で, $\ell = 1, k = 2$ の場合に永続探索または停止探索を解くアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在すると仮定する. 以下の式 1 を満たす $m \times n$ グリッドでの $\mathcal{A}$ の実行 $E = C_0, C_1, \dots$ を考える.

$$\begin{cases} mn > (4\phi + 4)(m + n - 4\phi - 4) + 2\phi(m + n - 2\phi) + 4 \\ m > 4\phi + 4 \\ n > 4\phi + 4 \end{cases} \quad (1)$$

i を, C_i で初めてロボットがグリッドの超内側のノードを訪問しているインデックスとする. 2 体のロボットを r_1, r_2 とし, 一般性を失わず, C_i で r_1 がグリッドの超内側のノードを訪問しているとする. 以下 2 つの補題は, 状況 C_i の前後でロボットが訪問できるノードの個数を示す.

補題 11. 状況が C_i になるまでにロボットが訪問しているノードは高々 $(4\phi + 4)(m + n - 4\phi - 4) + 2$ 個である.

証明. 仮定より, 状況 C_{i-1} までロボットはグリッドの超内側に含まれないノードのみを訪問する. グリッドの超内側に含まれないノードの個数は図 6 の $m \times n$ グリッドにおける 4 つの灰色の領域に含まれるノードの個数の総和である. この総和は以下の式で計算される.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \{m - (2\phi + 2)\}(2\phi + 2) + 2 \cdot \{n - (2\phi + 2)\}(2\phi + 2) \\ &= 2 \cdot (2\phi + 2)(m - 2\phi - 2 + n - 2\phi - 2) \\ &= (4\phi + 4)(m + n - 4\phi - 4) \end{aligned}$$

よって状況 C_{i-1} までにロボットは高々 $(4\phi + 4)(m + n - 4\phi - 4)$ 個のノードを訪問している. ロボットは 2 体だから, 状況 C_i で新しく訪問されるノードは高々 2 個である. したがって, 補題が成り立つ. $\square$

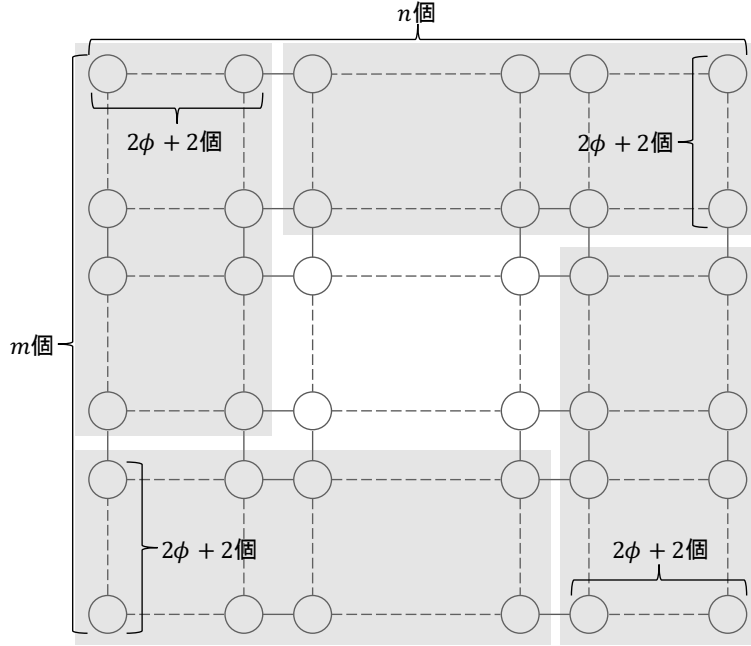


図 6: $m \times n$ グリッドの超内側に含まれない領域

補題 12. 状況が C_i になってからロボットが新しく訪問できるノードは高々 $2\phi(m + n - 2\phi) + 2$ 個である。

証明. r_1 と r_2 との距離に応じて, C_i を以下のように場合分けする。

1. r_1 と r_2 との距離が 0 の場合
2. r_1 と r_2 との距離が 1 以上 ϕ 以下の場合
3. r_1 と r_2 との距離が $\phi + 1$ 以上の場合

第 1 の場合, C_i で補題 10 の条件を満たすテリトリー集合を定義でき, 新しく訪問できるノードは高々 1 個である。

第 2 の場合, r_2 と任意の端ノードとの距離は少なくとも $\phi + 2$ であり, r_1 と r_2 の両方がグリッドの内側に含まれている。加えて, r_1 と r_2 は同じ色である。よって, r_1 と r_2 は, 移動するのであれば対称的に移動する。つまり, 各ロボットがもう 1 体のロボットに近づくように移動するか, 離れるように移動するかのどちら

かである．この場合， r_1 と r_2 との距離が $\phi + 1$ 以上にならない限り r_1 と r_2 が出られないような，1 辺が含むノードの個数が $\phi + 1$ である正方形の領域をグリッドの内側に定義できる．この領域は C_i で r_1 がいるグリッドの超内側のノードが属するように定義されるから， r_1 と r_2 がこの領域を出てもなお， r_1 と r_2 はグリッドの内側のノードにいる．よって， r_1 と r_2 がこの領域を出た直後の状況で，補題 10 の条件を満たすテリトリー集合を定義できる．この正方形の領域が含むノードの個数は $(\phi + 1)^2$ であり，この領域を出たときに高々 2 個の未訪問だったノードが新しく訪問される．したがって，第 2 の場合に新しく訪問できるノードは高々 $(\phi + 1)^2 + 2$ 個である．

第 3 の場合を， C_i で r_2 がグリッドの内側のノードにいる場合といない場合に分けて考える． C_i で r_2 がグリッドの内側のノードにいる場合， r_1 がグリッドの超内側のノードにいて r_1 と r_2 との距離が $\phi + 1$ 以上であるから，補題 10 の条件を満たすテリトリー集合を定義できる．この場合，各ロボットは自身のテリトリーにとどまり続けるから，時刻 t からロボットが新しく訪問できるノードは高々 2 個である． C_i で r_2 がグリッドの内側のノードにいない場合， r_2 はグリッドの内側に移動するまでに，グリッドの内側に含まれていないノードをいくつか訪問するかもしれない．補題 11 の証明と同様に考えると，グリッドの内側に含まれていないノードの個数は以下の式で計算される．

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (m - \phi)\phi + 2 \cdot (n - \phi)\phi \\ &= 2\phi(m - \phi + n - \phi) \\ &= 2\phi(m + n - 2\phi) \end{aligned}$$

よって， r_2 はグリッドの内側に移動するまでに高々 $2\phi(m + n - 2\phi)$ 個のノードを訪問する． r_2 がグリッドの内側に移動しない限り r_1 は r_2 を見るができないから， r_2 がグリッドの内側に移動するまでの間， r_1 は C_i で自身がいたノードおよび隣接しているグリッドの超内側のノードから成るテリトリーにとどまり続ける．つまり， r_1 はグリッドの超内側にとどまり続ける．したがって， r_2 がグリッドの内側に初めて移動したとき（言い換えると，グリッドの内側のもっとも外側のノードを訪問した時）， r_1 と r_2 の距離は少なくとも $\phi + 2$ であり，補題 10 の条件を満たすテリトリー集合を定義できる．この状況からは， r_2 は自身のテリト

リーから出られないから、 r_2 が新しく訪問できるノードは高々1個である。 r_1 は状況 C_i から自身のテリトリーにとどまり続けているから、 C_i から r_1 が新しく訪問できるノードは高々1個である。したがって、第3の場合に新しく訪問できるノードは高々 $2\phi(m+n-2\phi)+2$ 個である。

第1の場合に新しく訪問できるノードは高々1個であった。加えて、 $m > 4\phi+4$, $n > 4\phi+4$, $\phi \geq 1$ より、 $(\phi+1)^2 < 2\phi(m+n-2\phi)$ であると導くことができる。したがって、第3の場合が、新しく訪問できるノードの個数の上界が最も大きい。状況 C_i からロボットが新しく訪問できるノードは高々 $2\phi(m+n-2\phi)+2$ 個である。□

補題 11 と補題 12 から、 $\mathcal{A}$ の実行 E においてロボットが訪問できるノードは高々 $(4\phi+4)(m+n-4\phi-4)+2\phi(m+n-2\phi)+4$ 個である。式 1 から、より多くのノードが存在しているため、ロボットは探索を達成できない。これは矛盾であり、定理 7 が成り立つ。

4.1.4 半同期かつ $\phi = 1$ のロボット 2 体での不可能性

本項では、次の定理 8 を証明する。定理 8 より、半同期、非同期モデルにおいて、 $\phi = 1$ の場合にグリッド探索を達成するには少なくとも 3 体のロボットが必要である。

定理 8. 半同期モデルにおいて、 $\phi = 1$, $k = 2$ の場合に永続探索・停止探索を解くアルゴリズムは存在しない。これは、ライトの色数やキラリティに対する合意の有無に関わらず成り立つ。

証明. 背理法を使う。 $\phi = 1$, $k = 2$ の場合に永続探索または停止探索を解くアルゴリズム $\mathcal{A}$ が存在すると仮定する。以下の式 2 を満たす $m \times n$ グリッドでの $\mathcal{A}$ の実行 $E = C_0, C_1, \dots$ を考える。

$$\begin{cases} mn > 8 \cdot (m+n-8) + 6 \\ m > 8 \\ n > 8 \end{cases} \quad (2)$$

i を, C_i でロボットが初めてグリッドの超内側のノードを訪問しているインデックスとする. 補題 11 と同様にして, 状況 C_i までにロボットが訪問しているノードは高々 $8 \cdot (m + n - 8) + 2$ 個である. 2 体のロボット間の距離に応じて C_i を以下のように場合分けする.

1. 2 体の距離が 4 以上の場合
2. 2 体の距離が 2 または 3 の場合
3. 2 体の距離が 1 以下の場合

第 1 の場合が E で発生することはない. これを背理法によって証明する. C_i で 2 体の距離が 4 以上だと仮定すると, C_{i-1} で 2 体の距離は 2 以上であり, $\phi = 1$ だから 2 体のロボットはお互いを観測することができない. よって, C_{i-1} でグリッドの超内側のノードに隣接するノードにいるロボットが移動する場合, グリッドの超内側のノードが訪問されないようにスケジューラが移動方向を決めることができる. これは C_i でロボットがグリッドの超内側のノードを訪問していることに矛盾する.

第 2 の場合, 2 体のロボットはグリッドの内側のノードにいて, $\phi = 1$ だから補題 10 の条件を満たすテリトリー集合を定義できる. 2 体のロボットは各々のテリトリーから出られないから, 新しく訪問できるノードは高々 2 個である.

第 3 の場合, 2 体のロボット両方が属するテリトリー $T = \{v_1, v_2\}$ を次のように定義できる. C_i で 2 体の距離が 0 であれば, 2 体のロボットがいるノードおよび隣接しているノードの 1 つを v_1, v_2 とする. C_i で 2 体の距離が 1 であれば, ロボットがいる 2 個のノードを v_1, v_2 とする. 以下, 2 体のロボットがテリトリー T にいる状況を考える. 2 体の距離が 0 の状況でロボットが移動する場合, 各ロボットは他のノードにロボットを観測しないから, スケジューラによって移動方向が決定される. よって, ロボットはテリトリー T のもう一方のノードに移動し, 2 体のロボットが T にいる状況が維持される. 2 体のロボットが同時に移動するのであれば, 2 体の距離は 0 のままである. 1 体のロボットが移動するのであれば, 2 体の距離が 1 となる. 2 体の距離が 1 の状況でロボットが移動する場合, その移動方向はもう一方のロボットに近づく方向と, そのロボットから離れる方向

の2種類に分けられる．以下，2体のロボットを r_1, r_2 とおく． r_1 が r_2 に近づく場合，スケジューラが r_2 を作動させる前に r_1 だけを作動させることで， r_1 と r_2 の距離が0になる．加えて， r_1 と r_2 がテリトリー T にいる状況が維持される． r_2 が r_1 に近づく場合も同様に考えることができる．以上の議論から，第3の場合にロボットがテリトリー T から出ていくためには，2体の距離が1の状況で r_1 が r_2 から（あるいは r_2 が r_1 から）離れるように移動する必要がある． r_1 が r_2 から離れる場合，スケジューラが r_2 を作動させる前に r_1 だけを作動させることで， r_1 がテリトリー T を出る．このとき， r_1 が高々1個の未訪問だったノードを新しく訪問し， r_2 との距離は2になる． r_2 が r_1 から離れる場合も同様に考えることができる．2体の距離が2になれば，第1の場合と同様に補題10の条件を満たすテリトリー集合を定義できる．

第3の場合に新しく訪問されるノードの個数の上界を求める． C_i で2体の距離が0であれば，ロボットがテリトリー T の中で初めて移動するときに，高々1個の未訪問だったノードが訪問される．1体のロボットがテリトリーから出ていくときに，高々1個の未訪問だったノードが訪問される．2体の距離が2になってからは，第1の場合と同様に高々2個の未訪問だったノードが訪問される．したがって，第3の場合に状況 C_i から新しく訪問されるノードは高々4個である．

以上をまとめると， C_i からロボットが新しく訪問できるノードは高々4個である． C_i までにロボットが訪問しているノードは高々 $8 \cdot (m + n - 8) + 2$ 個であったから， A の実行 E においてロボットが訪問できるノードは高々 $8 \cdot (m + n - 8) + 6$ 個である．式2より $mn > 8 \cdot (m + n - 8) + 6$ であるから，未訪問のノードが存在し，ロボットは探索を達成できない．これは矛盾である． $\square$

4.2 アルゴリズムのルールの記述形式

本論文では，グリッド停止探索アルゴリズムの各ルールを図7の形式で記述する．図7(A) が $\phi = 1$ のアルゴリズムにおけるルールの記述形式であり，図7(B) が $\phi = 2$ のアルゴリズムにおけるルールの記述形式である．*Rule* はルールのラベルである．図7(A), 7(B) それぞれのグラフはガードである．図7(A) のグラフはビュー $V_1 = (c_r, M_{i-1,j}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i+1,j})$ を表し，図7(B) のグラフはビュー $V_2 =$

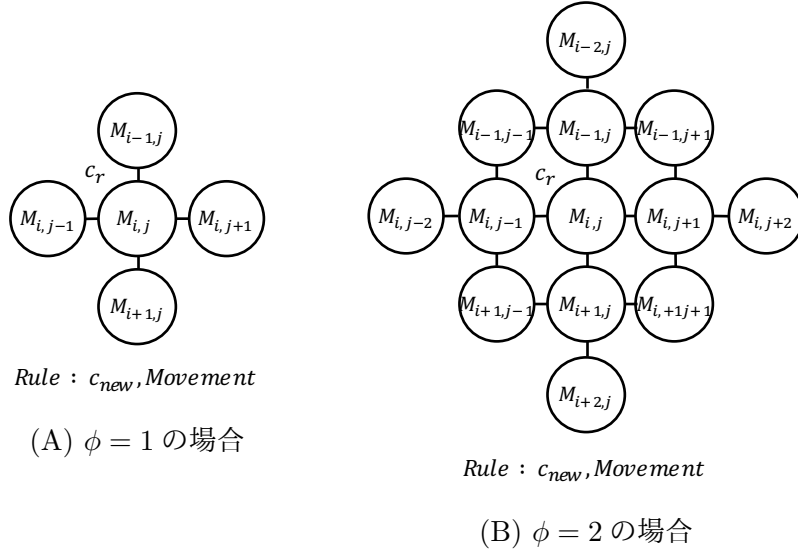


図 7: グリッド停止探索アルゴリズムの各ルールの記述形式

$(c_r, M_{i-2,j}, M_{i-1,j-1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j+1}, M_{i,j-2}, M_{i,j-1}, M_{i,j}, M_{i,j+1}, M_{i,j+2}, M_{i+1,j-1}, M_{i+1,j}, M_{i+1,j+1}, M_{i+2,j})$ を表す. ビューに含まれる各 $M_{i',j'}$ について, $M_{i',j'} = \emptyset$ の場合は, 対応するノードの中に $\emptyset$ と書く代わりに, 何も書かない. $M_{i',j'} = \perp$ の場合は, 対応するノードの中に $\perp$ と書く代わりに, そのノードを黒色に塗りつぶす. $M_{i',j'}$ が $\emptyset$ と $\perp$ のどちらかであればよい場合は, 対応するノードを灰色に塗りつぶす. ロボット r のビューのいずれかが V_ϕ ($\phi \in \{1, 2\}$) に一致すれば, r はそのルールを実行可能である. このとき, r は $c_{new}, Movement$ で表されるアクションを実行することができる. c_{new} はロボットの新しい色を表し, $Movement$ は移動を表す. $Movement$ は $Idle, \leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow$ のいずれかで表される. $Idle$ は, ロボットが移動しないことを表す. $\leftarrow$ は, ガードの $M_{i,j-1}$ に対応するノードへ移動することを表す. $\rightarrow$ は, ガードの $M_{i,j+1}$ に対応するノードへ移動することを表す. $\uparrow$ は, ガードの $M_{i-1,j}$ に対応するノードへ移動することを表す. $\downarrow$ は, ガードの $M_{i+1,j}$ に対応するノードへ移動することを表す.

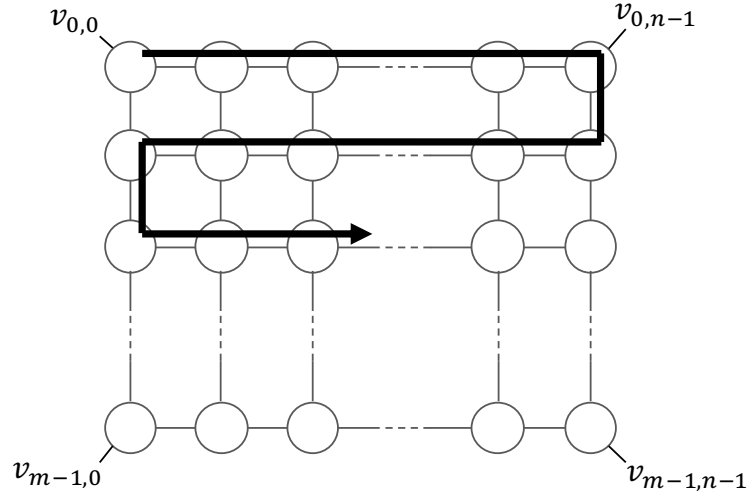


図 8: 提案アルゴリズムによる $m \times n$ グリッドの探索順路

4.3 提案アルゴリズムによる探索手法の概略

本節では，提案するグリッド停止探索アルゴリズムによる探索手法を概説する．簡単化のため，2.1.5 項の図 1 と同じ大域的な方角を説明に用いる．つまり，ノード $v_{i,j}$ から見て， $v_{i-1,j}$ が見える方向を北， $v_{i,j+1}$ が見える方向を東， $v_{i+1,j}$ が見える方向を南， $v_{i,j-1}$ が見える方向を西とする．提案するグリッド停止探索アルゴリズムは全て，図 8 の矢印に従う順序でノードを探索していく．つまり，グリッドの北西の隅から探索を開始して，以下の一連の動作を南端の隅（ m が奇数の場合は南東の隅， m が偶数の場合は南西の隅）に到達するまで繰り返す．

1. [東への直進] グリッドの東端まで一直線に進む．
2. [西への折り返し準備] 南に距離 1 だけ進みつつ，西に折り返せるように整列する．
3. [西への直進] グリッドの西端まで一直線に進む．
4. [東への折り返し準備] 南に距離 1 だけ進みつつ，東に折り返せるように整列する．

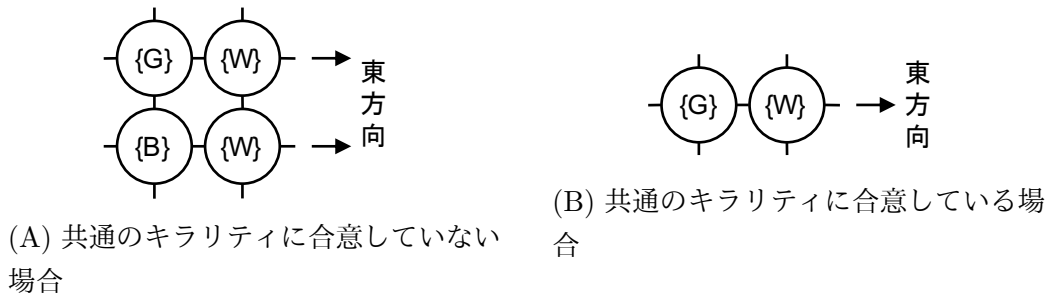


図 9: 完全同期かつ $\phi = 1$, $\ell = 3$ の場合の東へ直進するときの隊列

東または西への直進を行うとき、ロボットが共通のキラリティに合意していなければ、ロボットは2列に並んでいる状況を維持しながら直進する。2列に並ぶ理由は、グリッドの端に到達してから南に下がるために、ロボットが左右（北と南）を区別する必要があることである。2列に並んだロボットの各列にとって、もう一方の列が北と南を区別する目印となる。ロボットが共通のキラリティに合意していれば、ロボットは1列に並んでいる状況でも左右を一意に区別できる。よって、ロボットが共通のキラリティに合意している場合の提案アルゴリズムの多くは、ロボットが1列に並んでいる状況を維持しながら直進するように設計されている。ただし、共通のキラリティに対する合意がありながら、ロボットが2列に並んでいる状況を維持しながら直進するようなアルゴリズムを提案している場合もある（4.4.7, 4.4.11 項）。

各ロボットは自身の LCM サイクルごとに、隊列が組まれていることを自身のビューによって確認し、隊列に応じた進行方向に移動する。完全同期の場合、隊列内の全ロボットが同時に動作するため、全く同じ隊列を維持したまま移動することができる。例えば、完全同期かつ $\phi = 1$, $\ell = 3$ の場合の提案アルゴリズムでは、ロボットは図 9 に示す隊列を維持しながら東へ直進する。また、完全同期かつ $\phi = 2$, $\ell = 2$ で共通のキラリティに合意していない場合の提案アルゴリズムでは、ロボットは図 10 に示す隊列を維持しながら東へ直進する。

こうしてグリッドの東端に到達した後、ロボットは南へ進みつつ西へ折り返す準備をする。共通のキラリティに合意していない場合は、東へ直進するときの隊列と鏡像の関係にある隊列を形作る。これにより、東へ直進するときと同じルー

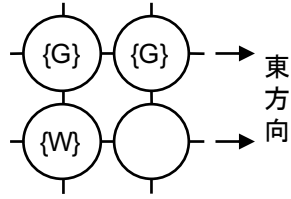
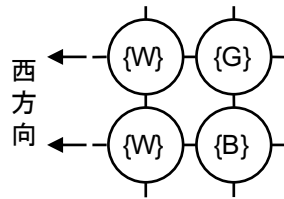
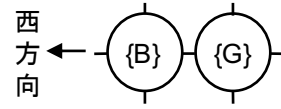


図 10: 完全同期かつ $\phi = 2$, $\ell = 2$ で共通のキラリティに合意していない場合の東へ直進するときの隊列



(A) 共通のキラリティに合意していない場合



(B) 共通のキラリティに合意している場合

図 11: 完全同期かつ $\phi = 1$, $\ell = 3$ の場合の西へ直進するときの隊列

ルによって西へ直進することができる。共通のキラリティに合意している場合は、東へ直進するときの隊列と鏡像の関係ではない隊列を構成する必要がある。なぜなら、東端に到達したときにキラリティを利用して南へ進んでいる場合、鏡像の関係にある隊列でグリッドの西端に到達したときは北へ戻ってしまうからである。例えば、図 9 の例と同じ条件である完全同期かつ $\phi = 1$, $\ell = 3$ の場合の提案アルゴリズムでは、ロボットは西へ直進するとき図 11 に示す隊列を維持している。

この後に西へ直進してグリッドの西端に到達したら、ロボットは南へ進みつつ東へ折り返す準備をする。例えば、図 9, 図 11 と同じ条件である完全同期かつ $\phi = 1$, $\ell = 3$ の場合の提案アルゴリズムでは、ロボットは図 9 に示した隊列を再び形作る。このような動作の繰り返しにより、ロボットは全ノードを訪問してグリッド南端の隅に到達することで、グリッドの停止探索を達成する。

半同期/非同期での直進方法 図 9, 図 10, 図 11 に示した例は完全同期の場合で、スケジューラが全ロボットを同時に作動させることを前提としていた。半同期/非

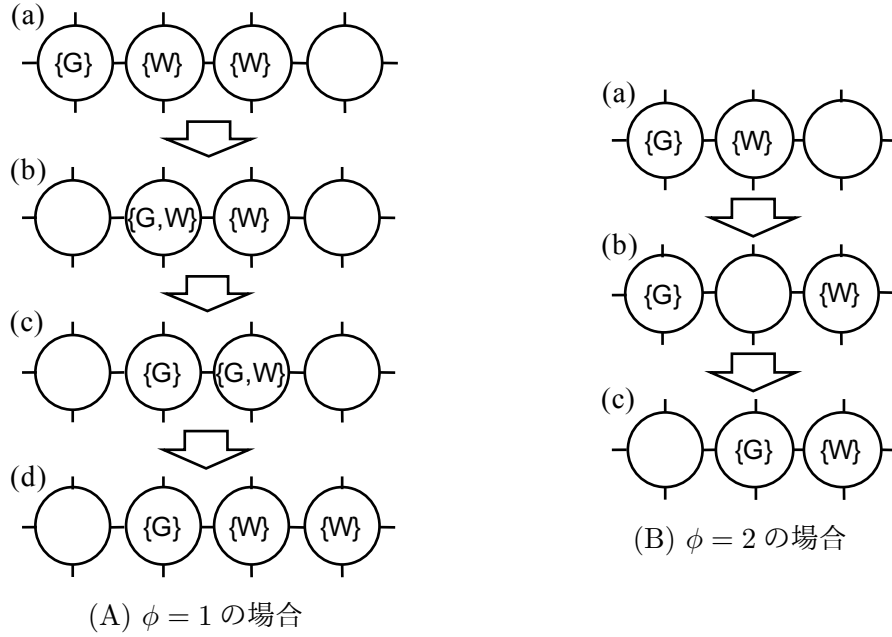


図 12: 半同期/非同期かつ $\ell = 3$ で共通のキラリティに合意している場合の東へ直進するときの隊列

同期の場合は，ほとんどの状況でロボットが1体ずつ動作するようなアルゴリズムを提案する．もし，ある状況で複数のロボットが動作できる場合，スケジューラがどのロボットを作動させるかによって実行が分岐する．分岐が多ければ多いほど，多数の実行が考えられる．これらの実行のいずれにおいても探索を達成できるようにアルゴリズムは設計されなければならないため，アルゴリズムを設計するときはこのような分岐を減らすことが望ましい．そのため，本論文では可能な限り各状況でロボットが1体ずつ動作するようにアルゴリズムを設計している．

例えば，半同期/非同期かつ $\ell = 3$ で共通のキラリティに合意している場合，ロボットは図 12 に示すように隊列を変えていくことで東に移動する（図 12 の隊列では 2 色しか使われていないが，残りの 1 色は西へ折り返すときに使われる）． $\phi = 1$ の場合（図 12(A)）は，(a) の状況から，色 G のロボットが隣接している色 W のロボットへ向かって移動し，(b) の状況となる．この状況から，色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが，自身の色を G にしてから隣接している色 W のロボットへ向かって移動し，(c) の状況となる．この状況から，色 W の

ロボットと同じノードにいる色 G のロボットが、自身の色を W にしてから隣接している G のロボットから離れるように移動し、(d) の状況となる．この状況は (a) の状況から各ロボットが距離 1 ずつ東へ移動した結果であり、以上の 3 種類の動作を繰り返すことで東へ移動し続けることができる． $\phi = 2$ の場合 (図 12(B)) は、(a) の状況から、色 W のロボットが色 G のロボットから離れるように移動し、(b) の状況となる．この状況から、色 G のロボットが色 W のロボットへ近づくように移動し、(c) の状況となる．この状況は (a) の状況から各ロボットが距離 1 ずつ東へ移動した結果であり、以上の 2 種類の動作を繰り返すことで東へ移動し続けることができる．

4.4 提案アルゴリズム

4.4.1 完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$

完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 5 に示す．

Algorithm 5 では、ロボットが自身の色を変えることがなく、その実行において異なる色のロボットが同一ノード上にいることもない．したがって、ある色のロボットをもう一方の色のロボット 2 体で表すことで、1 色少ないライトに対する探索アルゴリズムを設計することができる．この考えから、Algorithm 5 をもとに Algorithm 7 を設計している (4.4.3 項)．同様に、Algorithm 6 (4.4.2 項) をもとに Algorithm 8 (4.4.4 項) を、Algorithm 10 (4.4.6 項) をもとに Algorithm 12 (4.4.8 項) を設計している．

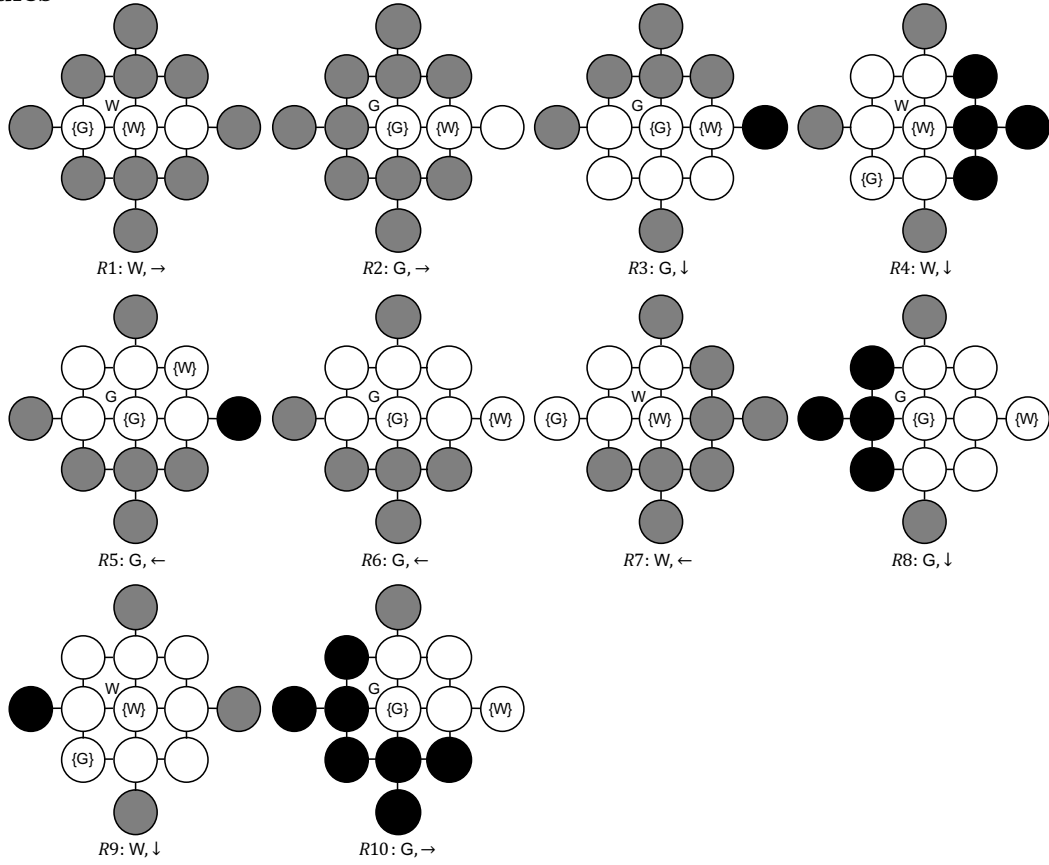
東への直進 初期状況では、色 W のロボットがルール $R1$ 、色 G のロボットがルール $R2$ を同時に実行することで、2 体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる．以降、グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで、2 体のロボットは東へ直進する．

Algorithm 5 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 2$, $k = 2$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$$

Rules



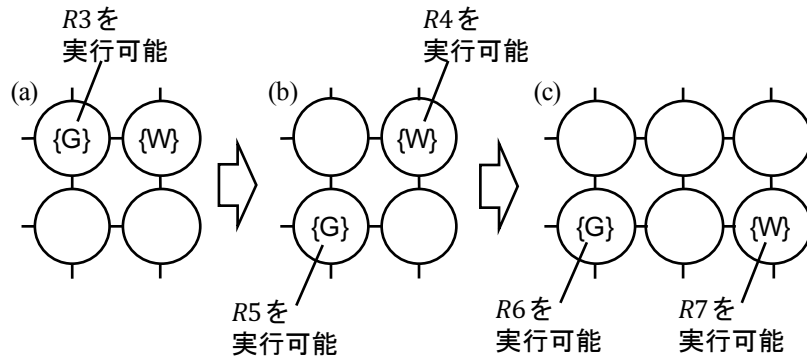


図 13: Algorithm 5 の実行における西への折り返し準備

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 13 に示す．東への直進を続けた 2 体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達する (図 13(a))．この状況から，ルール $R3$ によって，色 G のロボットが W のロボットと向かい合って右側に移動する（つまり，南に進む）．結果，図 13(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R4$ によって，W のロボットが南に進む．同時に，ルール $R5$ によって，色 G のロボットがグリッドの東端から離れるように移動する．結果，図 13(c) のような状況となる．

西への直進 図 13(c) の状況から，色 G のロボットがルール $R6$ ，色 W のロボットがルール $R7$ を同時に実行することで，2 体のロボットは西へ直進することができる．

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 14 に示す．西への直進を続けた 2 体のロボットは，やがてグリッドの西端に到達する (図 14(a))．この状況から，ルール $R8$ によって，色 G のロボットが南に進む．これと同時に，ルール $R7$ によって，色 W のロボットが移動する．結果，図 14(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R9$ によって，色 W のロボットが南に進む．結果，図 14(c) のような状況となり，2 体のロボットは再び東へ直進することができる．

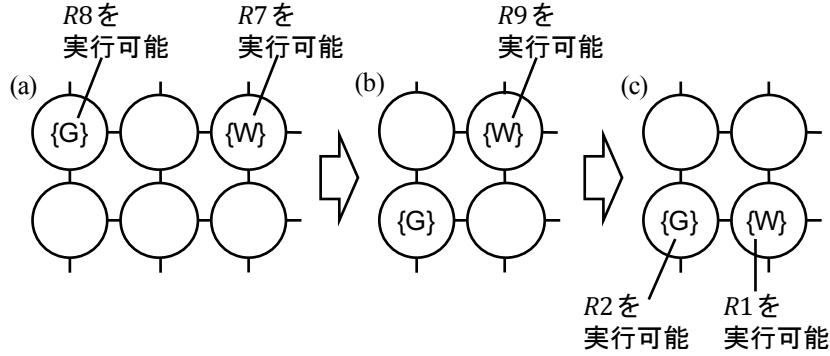


図 14: Algorithm 5 の実行における東への折り返し準備

探索の終了 ロボットが全ノードを訪問して隅に到達した後、ルールを実行可能なロボットがいなくなり、探索が終了する。 m が奇数の場合は、2体のロボットが東に直進することで南端のノードを順に訪問し、南東の隅に到達する。南東の隅のノード $v_{m-1,n-1}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ である。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合は、2体のロボットが西に直進することで南端のノードを順に訪問し、南西の隅に到達する。南西の隅のノード $v_{m-1,0}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G\}), (v_{m-1,2}, \{W\})\}$ である。この状況から、色 W のロボットがルール $R7$ によって移動し、色 G のロボットがルール $R10$ によって移動する。結果、状況は $\{(v_{m-1,1}, \{G, W\})\}$ となる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.2 完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 3$

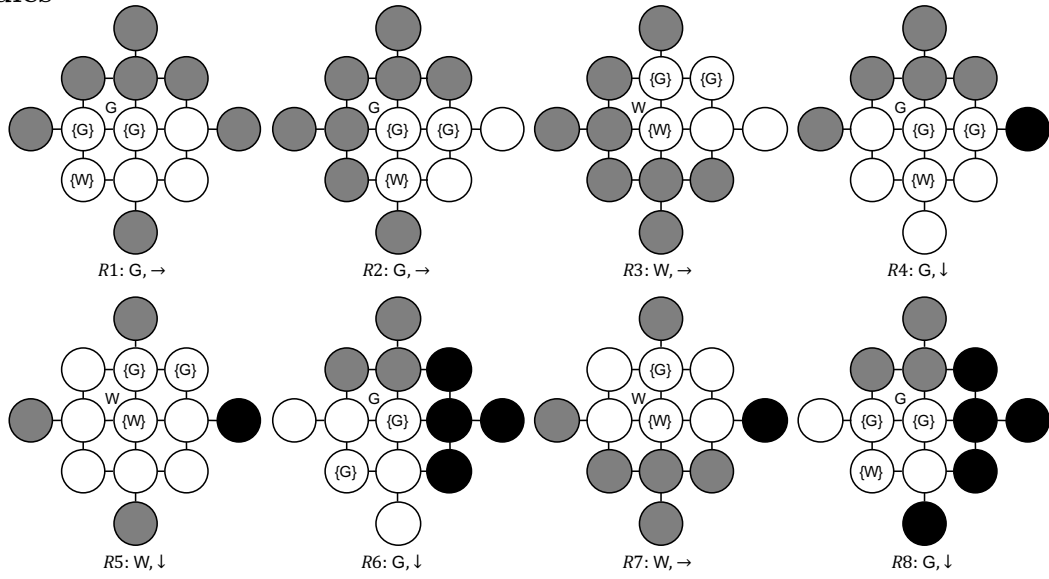
完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 6 に示す。

Algorithm 6 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 2$,
 $k = 3$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$$

Rules



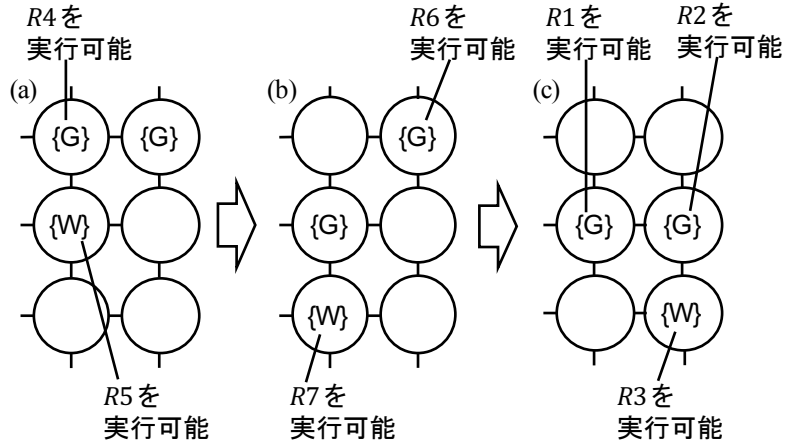


図 15: Algorithm 6 の実行における西への折り返し準備

東への直進 初期状況では, $v_{0,1}$ にいる色 G のロボットがルール $R1$, $v_{0,0}$ にいる色 G のロボットがルール $R2$, $v_{1,0}$ にいる色 W のロボットがルール $R3$ を同時に実行することで, 3 体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる. 以降, グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで, 3 体のロボットは東へ直進する.

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 15 に示す. 東への直進を続けた 3 体のロボットは, やがてグリッドの東端に到達する (図 15(a)). この状況から, ルール $R4$ と $R5$ によって, 隊列の西側にいる 2 体のロボットがグリッドの東端と向かい合って右側に移動する (つまり, 南に進む). このとき, グリッドの端にいる色 G のロボットは実行可能なルールを持たず, 移動しない. 結果, 図 15(b) のような状況となる. この状況から, ルール $R6$ によって, グリッドの端にいる色 G のロボットが南に進む. 同時に, ルール $R7$ によって, 色 W のロボットがグリッドの端に移動する. 結果, 図 15(c) のような状況となる.

西への直進, 東への折り返し準備 図 15(c) の状況でロボットが形作っている隊列は, ロボットが東へ直進するときに形作っていた隊列と鏡像の関係にある. よっ

て、ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1$, $R2$, $R3$ によって西へ直進することができる。同様に、西への折り返し準備をするときと同じルールによって、ロボットは東への折り返し準備をすることができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R8$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 G のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動する。結果、状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{W\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R8$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 G のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動する。結果、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.3 完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$

完全同期, $\phi = 2$, $\ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G, G\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 7 に示す。このアルゴリズムは、Algorithm 5 の色 W のロボットを色 G のロボット 2 体に置き換えたものである。同じノードにいる 2 体のロボットが Algorithm 5 の色 W のロボットと同じ役割を、残り 1 体のロボットが Algorithm 5 の色 G のロボットと同じ役割を果たす。

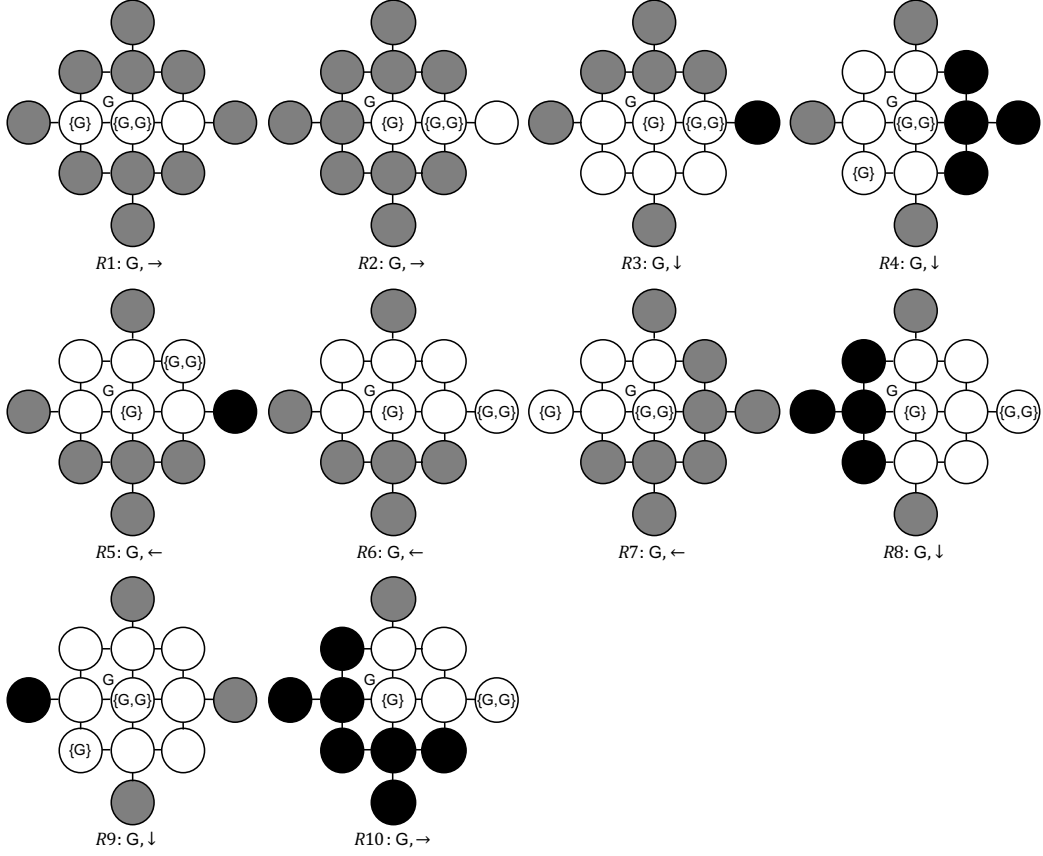
東への直進 初期状況では、 $v_{0,1}$ にいる 2 体のロボットがルール $R1$, $v_{0,0}$ にいる残りのロボットがルール $R2$ を同時に実行することで、3 体のロボットは隊列を

Algorithm 7 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 1$, $k = 3$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G, G\})\}$$

Rules



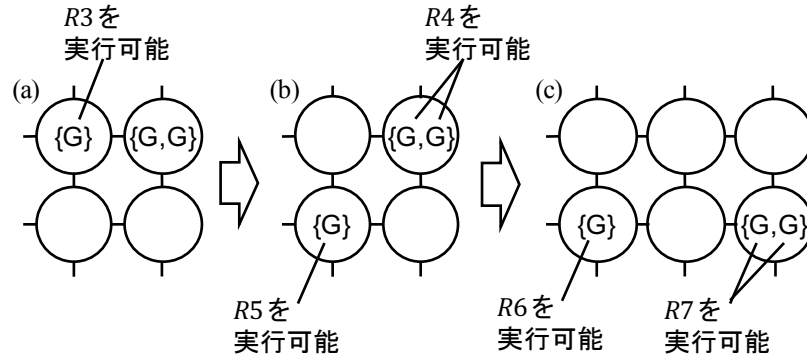


図 16: Algorithm 7 の実行における西への折り返し準備

維持しながら東へ進むことができる．以降，グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで，3体のロボットは東へ直進する．

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 16 に示す．東への直進を続けた3体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達する (図 16(a))．この状況から，ルール $R3$ によって，より西側にいるロボットが他2体のロボットと向かい合って右側に移動する（つまり，南に進む）．結果，図 16(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R4$ によって，同じノードにいる2体のロボットが南に進む．同時に，ルール $R5$ によって，残りのロボットがグリッドの東端から離れるように移動する．結果，図 16(c) のような状況となる．

西への直進 図 16(c) の状況から，より西側にいるロボットがルール $R6$ ，他2体のロボットがルール $R7$ を同時に実行することで，3体のロボットは西へ直進することができる．

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 17 に示す．西への直進を続けた3体のロボットは，やがてグリッドの西端に到達する (図 17(a))．この状況から，ルール $R8$ によって，グリッド西端にいるロボットが南に進む．これと同時に，ルール $R7$ によって，残り2体のロボットが

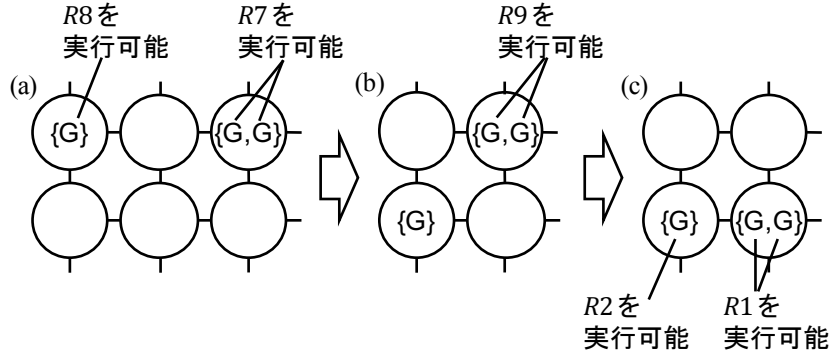


図 17: Algorithm 7 の実行における東への折り返し準備

移動する．結果，図 17(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R9$ によって，同じノードにいる 2 体のロボットが南に進む．結果，図 17(c) のような状況となり，3 体のロボットは再び東へ直進することができる．

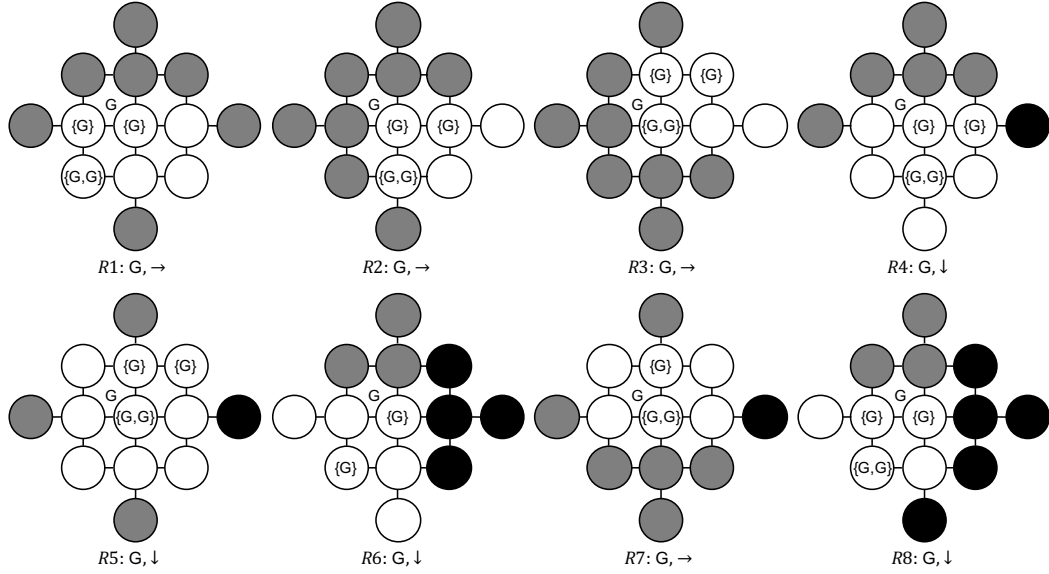
探索の終了 m が奇数の場合，2 体のロボットが東に直進することで南端のノードを順に訪問し，南東の隅に到達する．南東の隅のノード $v_{m-1,n-1}$ が訪問されたとき，状況は $\{(v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{G, G\})\}$ である．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合，2 体のロボットが西に直進することで南端のノードを順に訪問し，南西の隅に到達する．南西の隅のノード $v_{m-1,0}$ が訪問されたとき，状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G\}), (v_{m-1,2}, \{G, G\})\}$ である．この状況から， $v_{m-1,2}$ にいる 2 体のロボットがルール $R7$ によって移動し，残りのロボットがルール $R10$ によって移動する．結果，状況は $\{(v_{m-1,1}, \{G, G, G\})\}$ となる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして，ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり，停止探索を達成できる．

Algorithm 8 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2, \ell = 1, k = 4$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{G, G\})\}$$

Rules



4.4.4 完全同期, $\phi = 2, \ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 4$

完全同期, $\phi = 2, \ell = 1$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 4$ という条件で, 初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{G, G\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 8 に示す. このアルゴリズムは, Algorithm 6 の色 W のロボットを色 G のロボット 2 体に置き換えたものである. 同じノードにいる 2 体のロボットが Algorithm 6 の色 W のロボットと同じ役割を, 残り 1 体のロボットが Algorithm 6 の色 G のロボットと同じ役割を果たす.

東への直進 初期状況では, $v_{0,1}$ にいるロボットがルール R1, $v_{0,0}$ にいるロボットがルール R2, $v_{1,0}$ にいる 2 体のロボットがルール R3 を同時に実行することで, 4 体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる. 以降, グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで, 4 体の

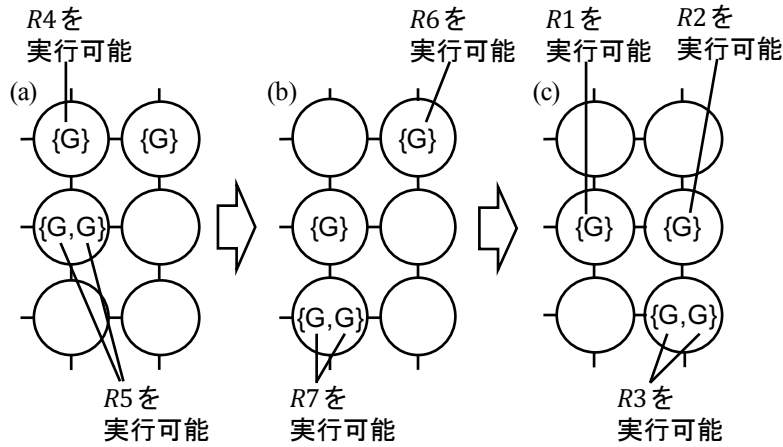


図 18: Algorithm 8 の実行における西への折り返し準備

ロボットは東へ直進する。

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 18 に示す。東への直進を続けた 4 体のロボットは、やがてグリッドの東端に到達する (図 15(a))。この状況から、ルール $R4$ と $R5$ によって、隊列の西側にいる計 3 体のロボットがグリッドの東端と向かい合って右側に移動する (つまり、南に進む)。このとき、グリッドの端にいるロボットは実行可能なルールを持たず、移動しない。結果、図 18(b) のような状況となる。この状況から、ルール $R6$ によって、グリッドの端にいるロボットが南に進む。同時に、ルール $R7$ によって、同じノードにいる 2 体のロボットがグリッドの端に移動する。結果、図 18(c) のような状況となる。

西への直進，東への折り返し準備 図 18(c) の状況でロボットが形作っている隊列は、ロボットが東へ直進するとき形作っていた隊列と鏡像の関係にある。よって、ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1$, $R2$, $R3$ によって西へ直進することができる。同様に、西への折り返し準備をするときと同じルールによって、ロボットは東への折り返し準備をすることができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する．やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{G, G\})\}$ になる．このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない．この状況から、ルール $R8$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいるロボットが $v_{m-1,0}$ に移動する．結果、状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{G, G\})\}$ になる．この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する．やがて、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{G, G\})\}$ になる．このとき、 $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない．この状況から、ルール $R8$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいるロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動する．結果、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{G, G\})\}$ になる．この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後ルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる．

4.4.5 完全同期, $\phi = 1$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$

完全同期, $\phi = 1$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 9 に示す．

東への直進 初期状況では、色 W のロボットがルール $R1$ 、色 G のロボットがルール $R2$ を同時に実行することで、2体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる．以降、グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで、2体のロボットは東へ直進する．

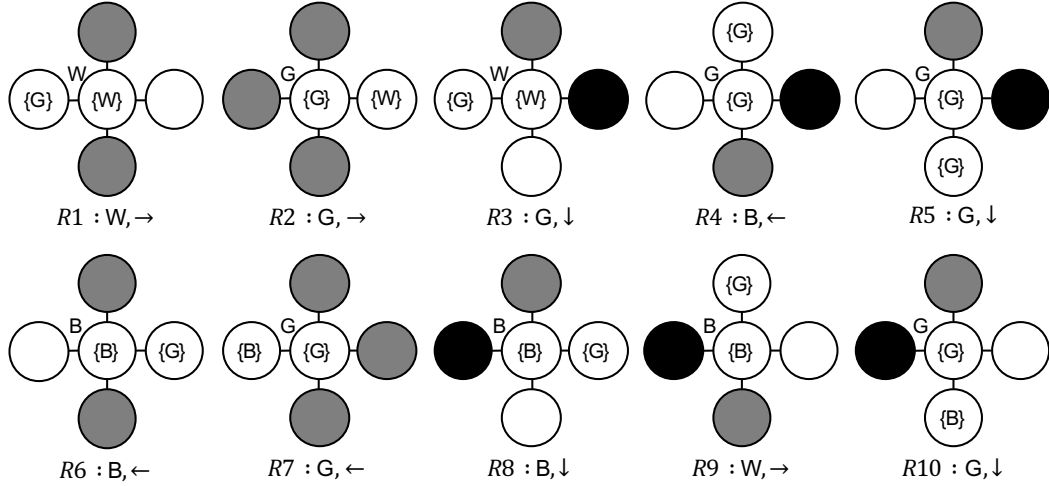
西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 19 に示す．東への直進を続けた2体のロボットは、やがてグリッドの東端に到達する (図 19(a))．この状況から、ルール $R3$ によって、色 W のロボットが色 G のロボットと向かい合って左側に移動する (つまり、南に進む)．同時に、ルー

Algorithm 9 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1$, $\ell = 3$, $k = 2$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$$

Rules



ル $R2$ によって、色 G のロボットが色 W のロボットに近づくように移動する．結果、図 19(b) のような状況となる．この状況から、ルール $R4$ によって、より南側にいるロボットが自身の色を B に変えてから、グリッドの東端から離れるように移動する．同時に、ルール $R5$ によって、より北側にいるロボットがもう一方のロボットに近づくように移動する．結果、図 19(c) のような状況となる．

西への直進 図 19(c) の状況から、色 B のロボットがルール $R6$ 、色 G のロボットがルール $R7$ を同時に実行することで、2 体のロボットは西へ直進することができる．

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 20 に示す．西への直進を続けた 2 体のロボットは、やがてグリッドの西端に到達する (図 20(a))．この状況から、ルール $R8$ によって、色 B のロボットが南に進む．これと同時に、ルール $R7$ によって、色 G のロボットが色 B のロボットに近づくように移動する．結果、図 20(b) のような状況となる．この状況から、ルー

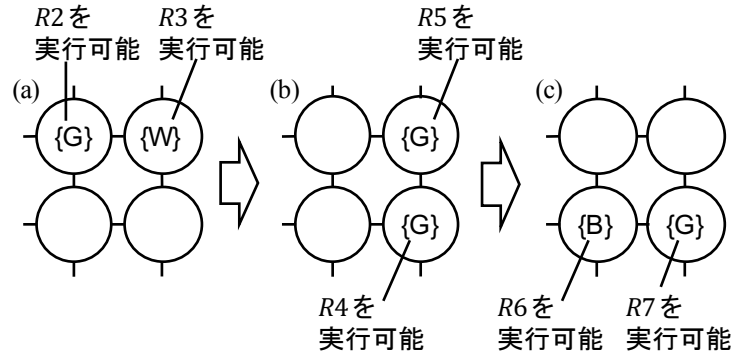


図 19: Algorithm 9 の実行における西への折り返し準備

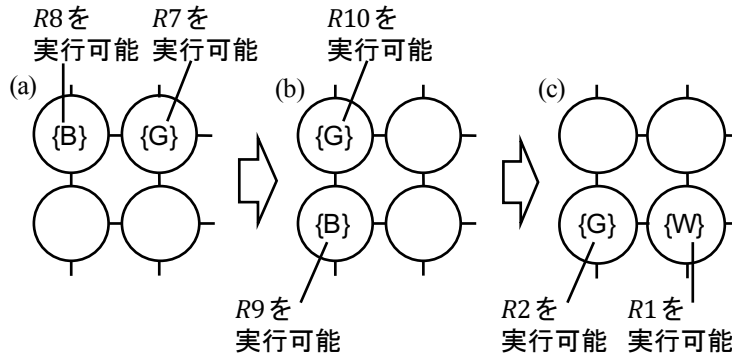


図 20: Algorithm 9 の実行における東への折り返し準備

ル R_9 によって、色 B のロボットが自身の色を W に変えてから、グリッドの西端から離れるように移動する．同時に、色 G のロボットが色 B のロボットに近づくように移動する．結果、図 20(c) のような状況となり、2 体のロボットは再び東へ直進することができる．

探索の終了 ロボットが全ノードを訪問して隅に到達した後、ルールを実行可能なロボットがいなくなり、探索が終了する． m が奇数の場合は、2 体のロボットが東に直進することで南端のノードを順に訪問し、南東の隅に到達する．南東の隅のノード $v_{m-1,n-1}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$

である．この状況から，ルール $R2$ によって色 G のロボットが移動し，状況は $\{(v_{m-1,n-1}, \{G, W\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合は，2体のロボットが西に直進することで南端のノードを順に訪問し，南西の隅に到達する．南西の隅のノード $v_{m-1,0}$ が訪問されたとき，状況は $\{(v_{m-1,0}, \{B\}), (v_{m-1,1}, \{G\})\}$ である．この状況から，ルール $R7$ によって色 G のロボットが移動し，状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G, B\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして，ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり，停止探索を達成できる．

4.4.6 完全同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 3$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 4$

完全同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 3$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 4$ という条件で，初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{B\}), (v_{1,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 10 に示す．

東への直進 初期状況では， $v_{0,1}$ にいる色 W のロボットがルール $R1$ ， $v_{0,0}$ にいる色 G のロボットがルール $R2$ ， $v_{1,1}$ にいる色 W のロボットがルール $R3$ ， $v_{1,0}$ にいる色 B のロボットがルール $R4$ を同時に実行することで，4体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる．以降，グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで，4体のロボットは東へ直進する．

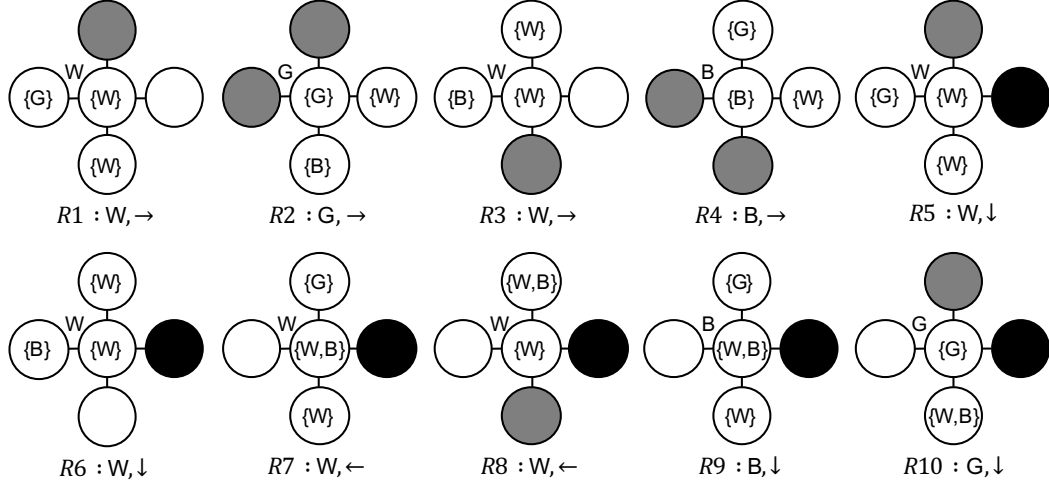
西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 21 に示す．東への直進を続けた4体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達する (図 21(a))．この状況から，ルール $R5$ と $R6$ によって，グリッドの東端にいる2体のロボットが南に進む．同時に，ルール $R2$ と $R4$ によって，残りの2体のロボットがグリッドの東端に移動する．結果，図 21(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R7$ と $R8$ によって，2体の色 W のロボットがグリッドの東端

Algorithm 10 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1$, $\ell = 3$, $k = 4$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{B\}), (v_{1,1}, \{W\})\}$$

Rules



から離れるように移動する．同時に，ルール $R9$ と $R10$ によって，色 B のロボットと色 G のロボットが南に進む．結果，図 21(c) のような状況となる．

西への直進，東への折り返し準備 図 21(c) の状況でロボットが形作っている隊列は，ロボットが東へ直進するとき形作っていた隊列と鏡像の関係にある．よって，ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ によって西へ直進することができる．同様に，西への折り返し準備をするときと同じルールによって，ロボットは東への折り返し準備をすることができる．

探索の終了 m が奇数の場合，ロボットは西に直進することで南端のノードを順に訪問し，南西の隅に到達する．南西の隅のノード $v_{m-1,0}$ が訪問されたとき，状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ である．この状況から，ルール $R5$ によって， $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動する．同時に，ルール $R2$ と $R4$ によって，色 G のロボットと色 B のロボットがグリッドの西端に移動する．結果，状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W, W, B\})\}$ になる．この状況では，

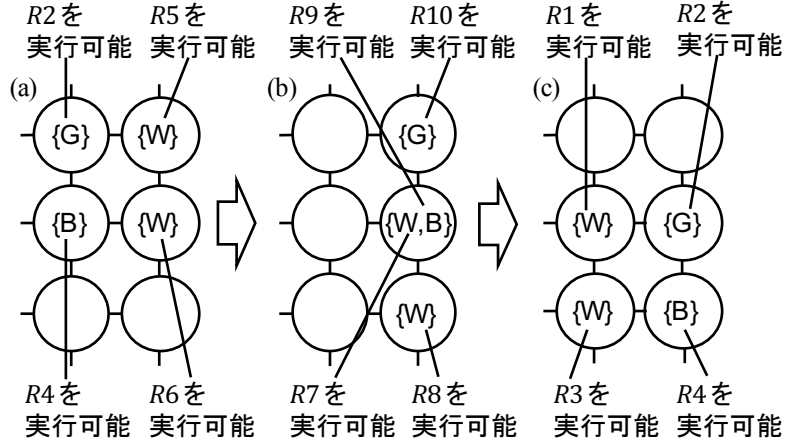


図 21: Algorithm 10 の実行における西への折り返し準備

いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進することで南端のノードを順に訪問し、南東の隅に到達する。南東の隅のノード $v_{m-1,n-1}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{B\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ である。この状況から、ルール $R5$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動する。同時に、ルール $R2$ と $R4$ によって、色 G のロボットと色 B のロボットがグリッドの東端に移動する。結果、状況は $\{(v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W, W, B\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後ルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.7 完全同期, $\phi = 1$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$

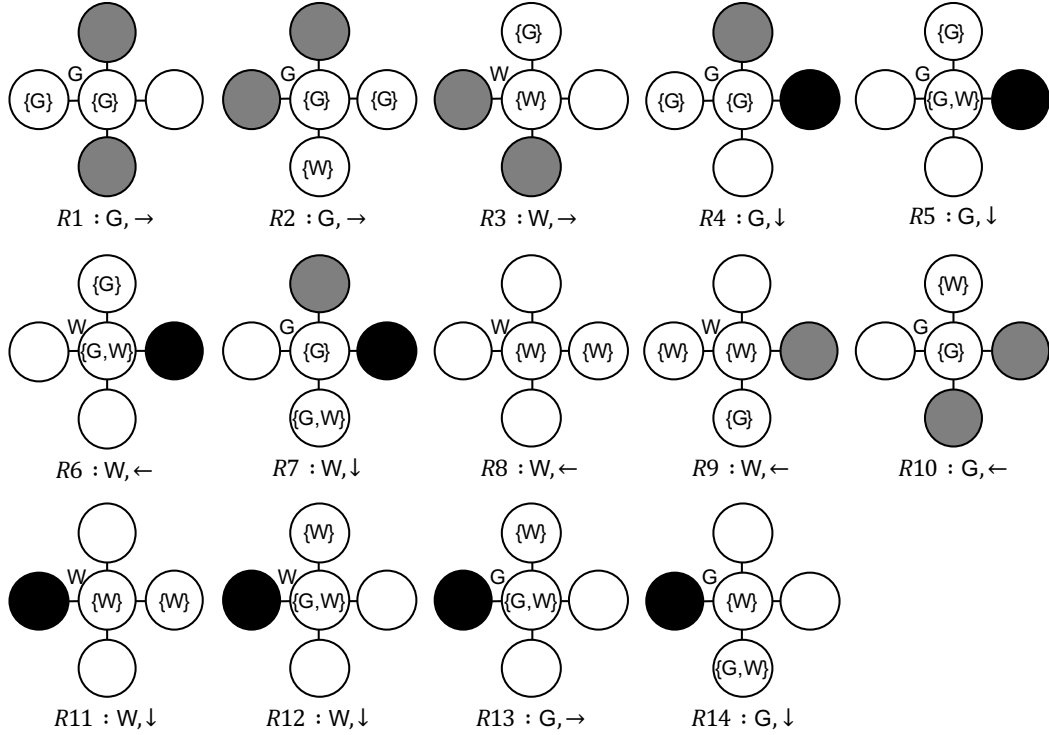
完全同期, $\phi = 1$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 11 に示す。

Algorithm 11 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1$, $\ell = 2$, $k = 3$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{G\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$$

Rules



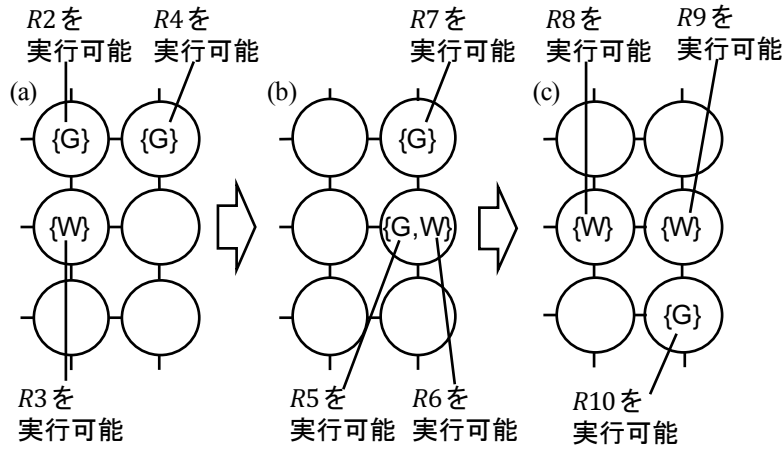


図 22: Algorithm 11 の実行における西への折り返し準備

東への直進 初期状況では, $v_{0,1}$ にいる色 G のロボットがルール $R1$, $v_{0,0}$ にいる色 G のロボットがルール $R2$, $v_{1,0}$ にいる色 W のロボットがルール $R3$ を同時に実行することで, 3 体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる. 以降, グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで, 3 体のロボットは東へ直進する.

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 22 に示す. 東への直進を続けた 3 体のロボットは, やがてグリッドの東端に到達する (図 22(a)). この状況から, ルール $R4$ によって, グリッドの東端にいる色 G のロボットが南に移動する. 同時に, ルール $R2$ と $R3$ によって, 残りのロボットがグリッドの東端に移動する. 結果, 図 22(b) のような状況となる. この状況から, ルール $R5$ によって, より南側にいる色 G のロボットがさらに南へ移動する. 同時に, ルール $R6$ によって, 色 W のロボットがグリッドの東端から離れるように移動し, ルール $R7$ によって, 残りの色 G のロボットが自身の色を W に変えてから南に移動する. 結果, 図 22(c) のような状況となる.

西への直進 図 22(c) の状況から, より西側にいる色 W のロボットがルール $R8$, もう一方の色 W のロボットがルール $R9$, 残りの色 G のロボットがルール $R10$ を

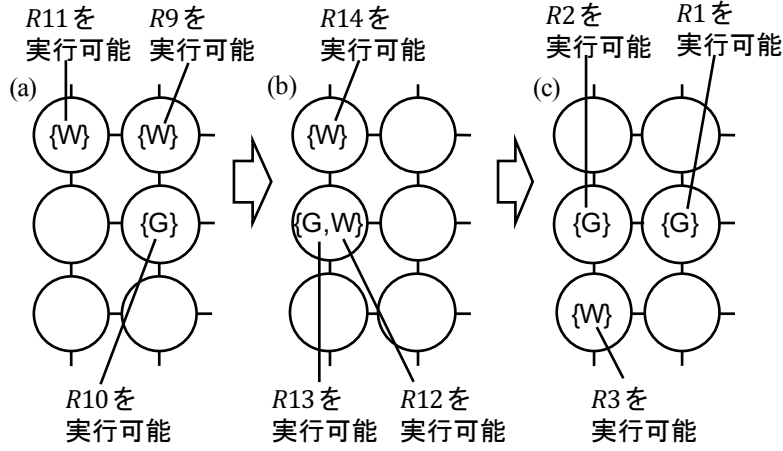


図 23: Algorithm 11 の実行における東への折り返し準備

同時に実行することで、3体のロボットは西へ直進することができる。

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 23 に示す。西への直進を続けた 3 体のロボットは、やがてグリッドの西端に到達する (図 23(a))。この状況から、ルール $R11$ によって、グリッドの西端にいる色 W のロボットが南に進む。同時に、ルール $R9$ と $R10$ によって、他 2 体のロボットがグリッドの西端に移動する。結果、図 23(b) のような状況となる。この状況から、ルール $R12$ によって、より南側にいる色 W のロボットがさらに南へ移動する。同時に、ルール $R13$ によって、色 G のロボットがグリッドの東端から離れるように移動し、ルール $R14$ によって、残りの色 W のロボットが自身の色を G に変えてから南に移動する。結果、図 23(c) のような状況となり、2 体のロボットは再び東へ直進することができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{G\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R11$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動する。同時に、ルール $R9$ と $R10$ によって、他 2 体のロボットがグリッドの西端に移動する。結果、状況は

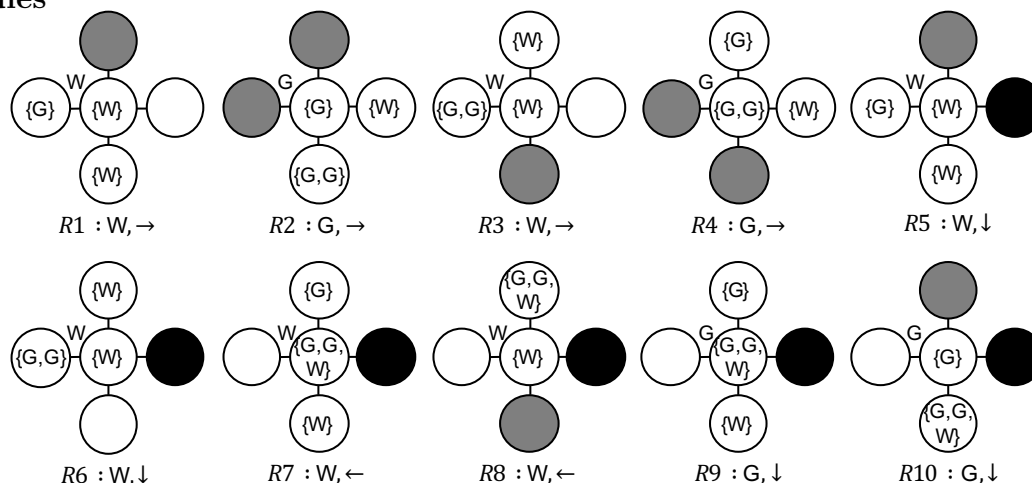
$\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-1,0}, \{G, W\})\}$ になる．次に，ルール $R14$ によって， $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動し，状況は $\{(v_{m-1,0}, \{G, W, W\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合，ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する．やがて，状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{W\})\}$ になる．このとき， $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない．この状況からルール $R4$ によって， $v_{m-2,n-1}$ にいる色 G のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動する．同時に，ルール $R2$ と $R3$ によって，残りのロボットがグリッドの東端に移動する．結果，状況は $\{(v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{G, W\})\}$ になる．次に，ルール $R7$ によって， $v_{m-2,n-1}$ にいる色 G のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動し，状況は $\{(v_{m-1,n-1}, \{G, G, W\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして，ロボットは全ノードを訪問した後ルールを実行しなくなり，停止探索を達成できる．

4.4.8 完全同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 2$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 5$

完全同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 2$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 5$ という条件で，初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{G, G\}), (v_{1,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 12 に示す．このアルゴリズムは，Algorithm 10 の色 B のロボットを色 G のロボット 2 体に置き換えたものである．

東への直進 初期状況では， $v_{0,1}$ にいる色 W のロボットがルール $R1$ ， $v_{0,0}$ にいる色 G のロボットがルール $R2$ ， $v_{1,1}$ にいる色 W のロボットがルール $R3$ ， $v_{1,0}$ にいる 2 体の色 G のロボットがルール $R4$ を同時に実行することで，5 体のロボットは隊列を維持しながら東へ進むことができる．以降，グリッドの東端に到達するまで各ロボットが同じルールを繰り返し実行することで，5 体のロボットは東へ直進する．

Algorithm 12 Fully Synchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1$, $\ell = 2$, $k = 5$ Without Common Chirality

$$\{(v_{0,0}, \{\mathbf{G}\}), (v_{0,1}, \{\mathbf{W}\}), (v_{1,0}, \{\mathbf{G}, \mathbf{G}\}), (v_{1,1}, \{\mathbf{W}\})\}$$


西への直進，東への折り返し準備 図 24(c) の状況でロボットが形作っている隊列は，ロボットが東へ直進するとき形作っていた隊列と鏡像の関係にある．よって，ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1, R2, R3, R4$ によって西へ直進することができる．同様に，西への折り返し準備をするときと同じルールによって，ロボットは東への折り返し準備をすることができる．

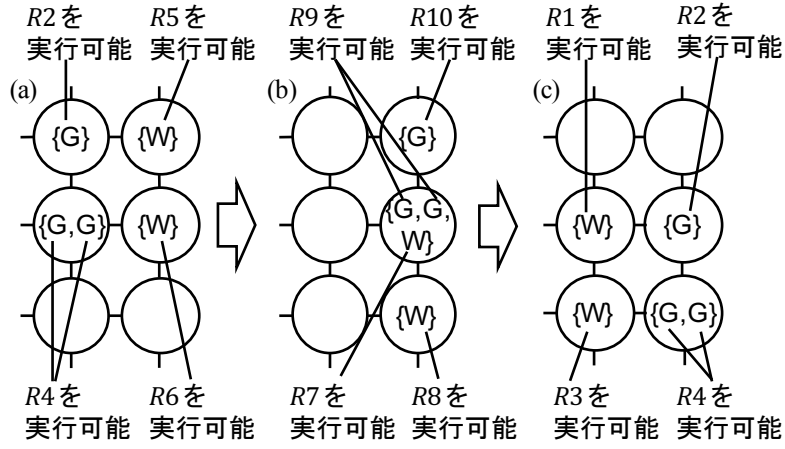


図 24: Algorithm 12 の実行における西への折り返し準備

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進することで南端のノードを順に訪問し、南西の隅に到達する。南西の隅のノード $v_{m-1,0}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{G, G\})\}$ である。この状況から、ルール $R5$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動する。同時に、ルール $R2$ と $R4$ によって、計 3 体の色 G のロボットがグリッドの西端に移動する。結果、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W, W, G, G\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進することで南端のノードを順に訪問し、南東の隅に到達する。南東の隅のノード $v_{m-1,n-1}$ が訪問されたとき、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{G, G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ である。この状況から、ルール $R5$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動する。同時に、ルール $R2$ と $R4$ によって、計 3 体の色 G のロボットがグリッドの東端に移動する。結果、状況は $\{(v_{m-2,n-1}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W, W, G, G\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

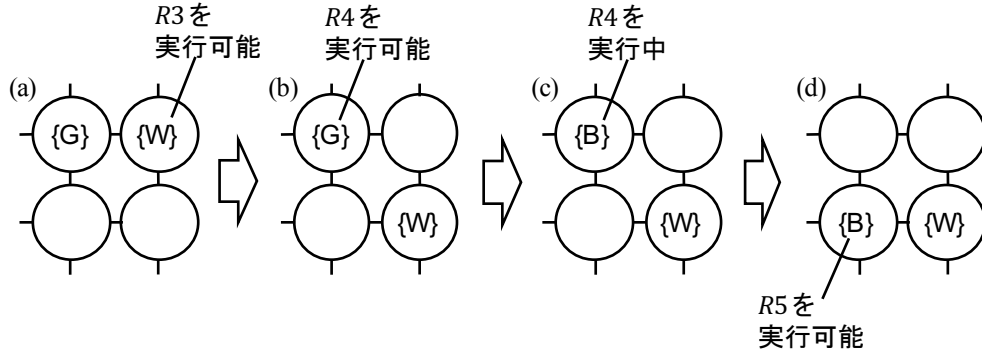


図 25: Algorithm 13 の実行における西への折り返し準備

4.4.9 非同期, $\phi = 2$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$

非同期, $\phi = 2$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 2$ という条件で, 初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 13 に示す. このアルゴリズムは非同期モデルにおいて停止探索を達成するから, 半同期モデルと完全同期モデルにおいても停止探索を達成する (次項以降で提案するアルゴリズムも同様である).

東への直進 初期状況から, ルール $R1$ によって, 色 W のロボットが色 G のロボットから離れるように移動し, 状況は $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\})\}$ になる. この状況から, ルール $R2$ によって, 色 G のロボットが色 W のロボットに近づくように移動し, 状況は $\{(v_{0,1}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\})\}$ になる. 以降, ロボットがグリッドの東端に到達するまでルール $R1$ と $R2$ が交互に実行されることで, 2体のロボットは東へ直進する.

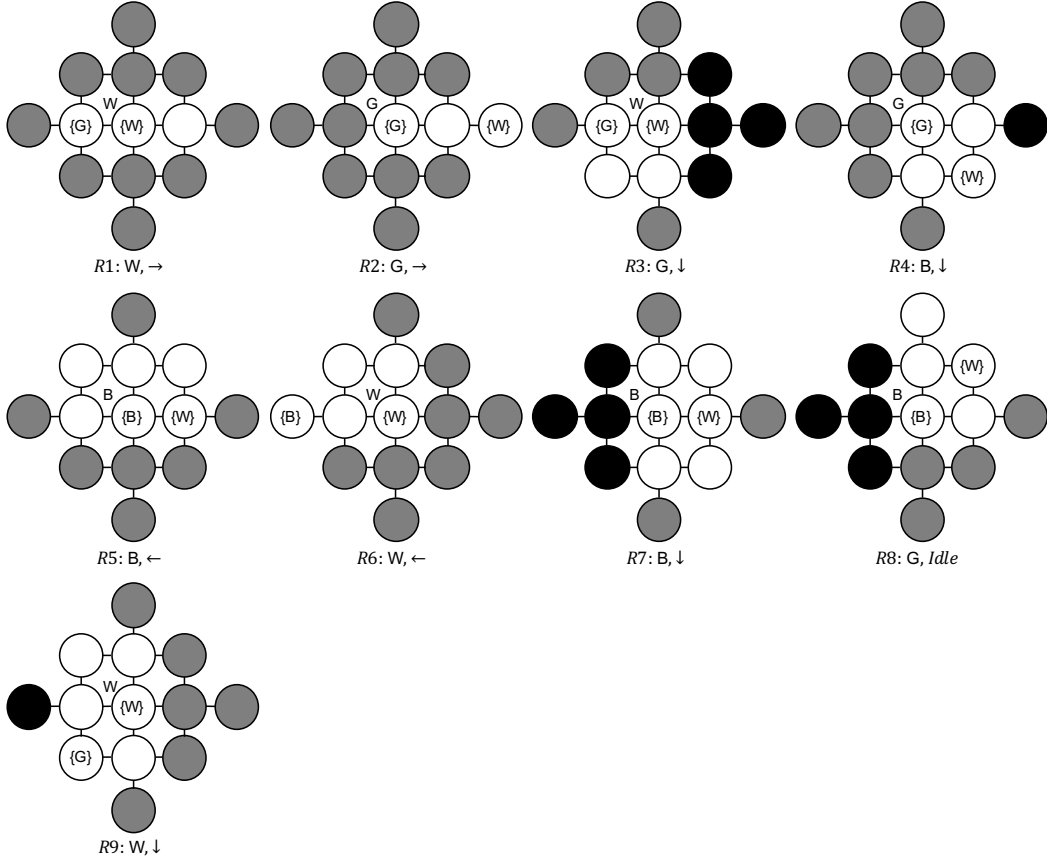
西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 25 に示す. 東への直進を続けた 2体のロボットは, やがてグリッドの東端に到達する (図 25(a)). この状況から, ルール $R3$ によって, 色 W のロボットが南に進み, 図 25(b) のような状況となる. この状況から, ルール $R4$ によって, 色 G のロボットが自身の色を B に変えてから南に進む. 非同期モデルでは, このロボッ

Algorithm 13 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 3$,
 $k = 2$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\})\}$$

Rules



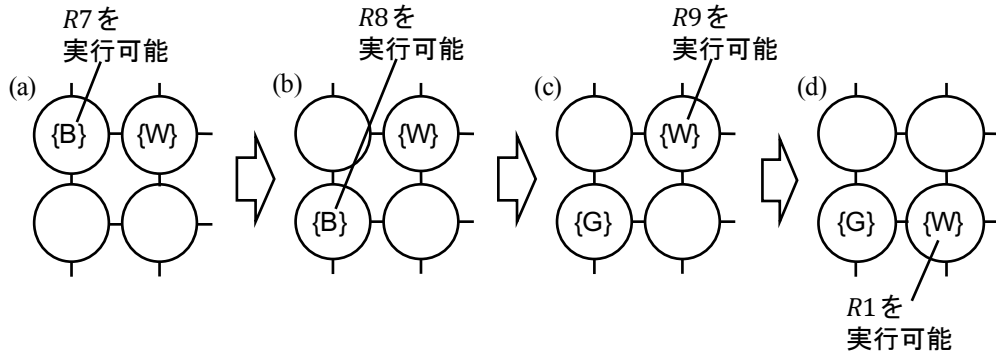


図 26: Algorithm 13 の実行における東への折り返し準備

トが自身の色を変えてから移動するまでに図 25(c) のような状況が発生し、もう 1 体の色 W のロボットがこの状況において LCM サイクルを実行するかもしれない。しかしながら、色 W のロボットがこの状況において実行できるようなルールは存在しない。結果、図 25(d) のような状況となる。

西への直進 図 25(d) の状況から、ルール R5 によって、色 B のロボットが色 W のロボットから離れるように移動する。次に、ルール R6 によって、色 W のロボットが色 B のロボットに近づくように移動する。以降、ロボットがグリッドの西端に到達するまでルール R5 と R6 が交互に実行されることで、2 体のロボットは西へ直進する。

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 26 に示す。西への直進を続けた 2 体のロボットは、やがてグリッドの西端に到達する (図 26(a))。この状況から、ルール R7 によって色 B のロボットが南に進み、図 26(b) のような状況となる。この状況から、ルール R8 によって色 B のロボットが自身の色を G に変え、図 26(c) のような状況となる。この状況から、ルール R9 によって色 W のロボットが南に進み、図 26(d) のような状況となる。この状況から 2 体のロボットは再び東へ直進することができる。

探索の終了 m が奇数の場合、2体のロボットが東に直進することで南端のノードを順に訪問し、南東の隅に到達する．このとき、状況は $\{(v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ である．この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合、2体のロボットが西に直進することで南端のノードを順に訪問し、南西の隅に到達する．このとき、状況は $\{(v_{m-1,0}, \{B\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ である．この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる．

4.4.10 非同期, $\phi = 2$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 3$

非同期, $\phi = 2$, $\ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{B\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 4$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 14 に示す．

東への直進 初期状況から、ルール $R1$ によって色 B のロボットが移動し、状況は $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,1}, \{B\})\}$ になる．この状況から、ルール $R2$ によって色 W のロボットが移動し、状況は $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,1}, \{B\})\}$ になる．この状況から、ルール $R3$ によって色 G のロボットが移動し、状況は $\{(v_{0,1}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,1}, \{B\})\}$ になる．以降、ロボットがグリッドの東端に到達するまでルール $R1$, $R2$, $R3$ が順番に繰り返し実行されることで、3体のロボットは東へ直進する．

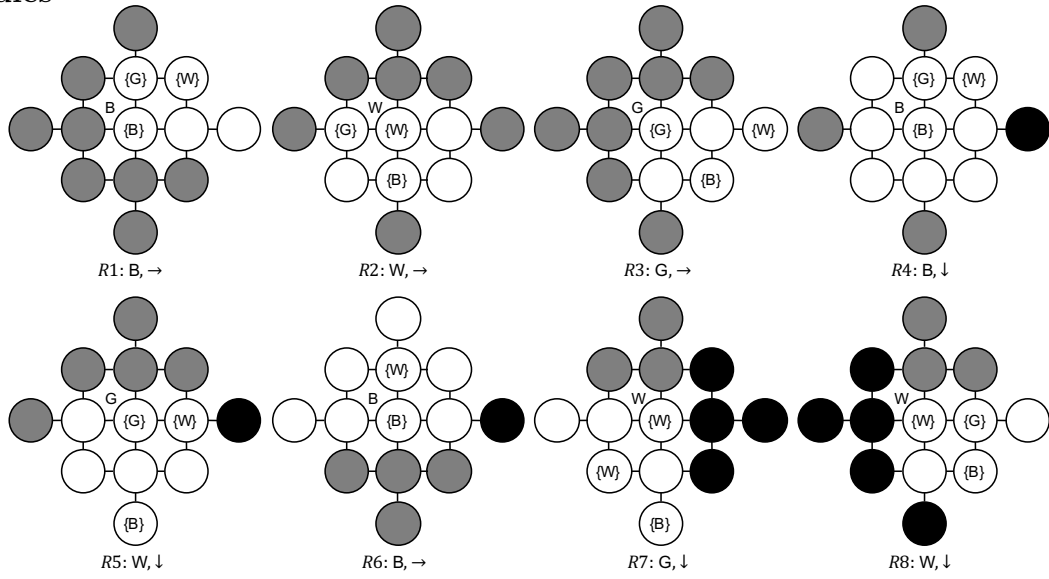
西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 27 に示す．東への直進を続けた3体のロボットは、やがてグリッドの東端に到達する (図 27(a))．この状況から、ルール $R4$ によって色 B のロボットが南に進み、図 27(b) のような状況となる．この状況から、ルール $R5$ によって、色 G のロボットが自身の色を W に変えてから南に進む．非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 27(c) のような状況が発生し、この状況において他のロボットが LCM サイクルを実行するかもしれない．しかしなが

Algorithm 14 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 3$,
 $k = 3$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{B\})\}$$

Rules



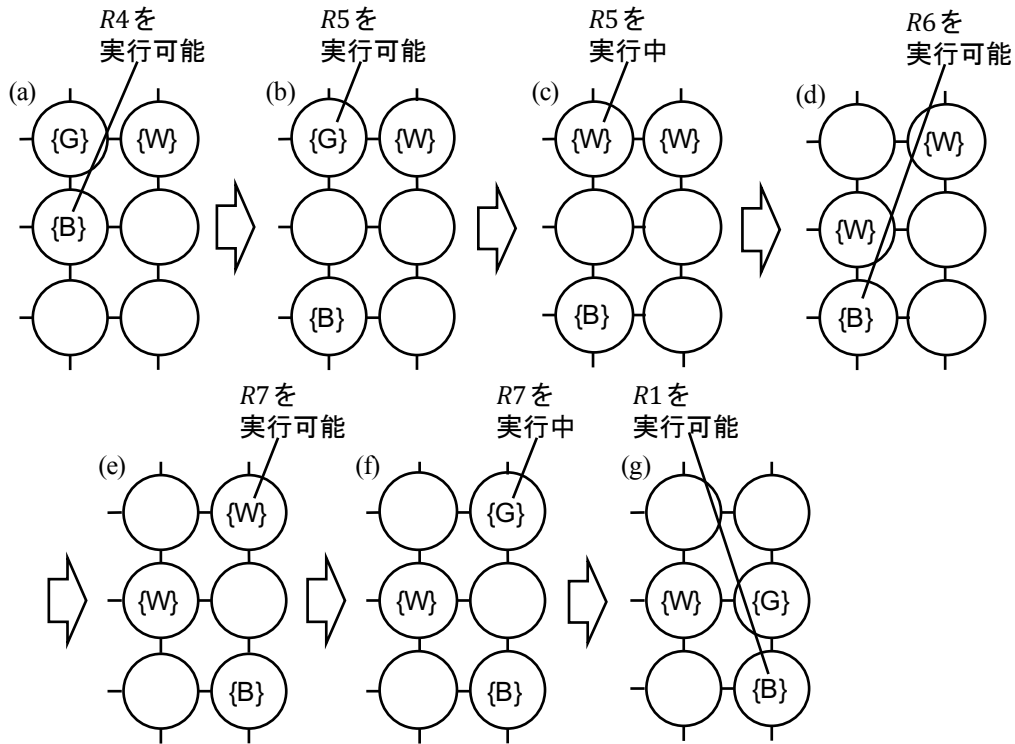


図 27: Algorithm 14 の実行における西への折り返し準備

ら，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 27(d) のようになる．この状況から，ルール $R6$ によって色 B のロボットがグリッドの東端に移動し，図 27(e) のような状況となる．この状況から，ルール $R7$ によって，色 W のロボットが自身の色を G に変えてから南に進む．非同期モデルでは，このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 27(f) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 27(g) のようになる．

西への直進，東への折り返し準備 図 27(g) の状況でロボットが形作っている隊列は，ロボットが東へ直進するとき形作っていた隊列と鏡像の関係にある．よって，ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1$ ， $R2$ ， $R3$ によって西へ直進することができる．同様に，西への折り返し準備をするときと同じルールによって，

ロボットは東への折り返し準備をすることができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R8$ によって色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{B\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R8$ によって色 W のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{B\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.11 非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$

非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{G\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 15 に示す。

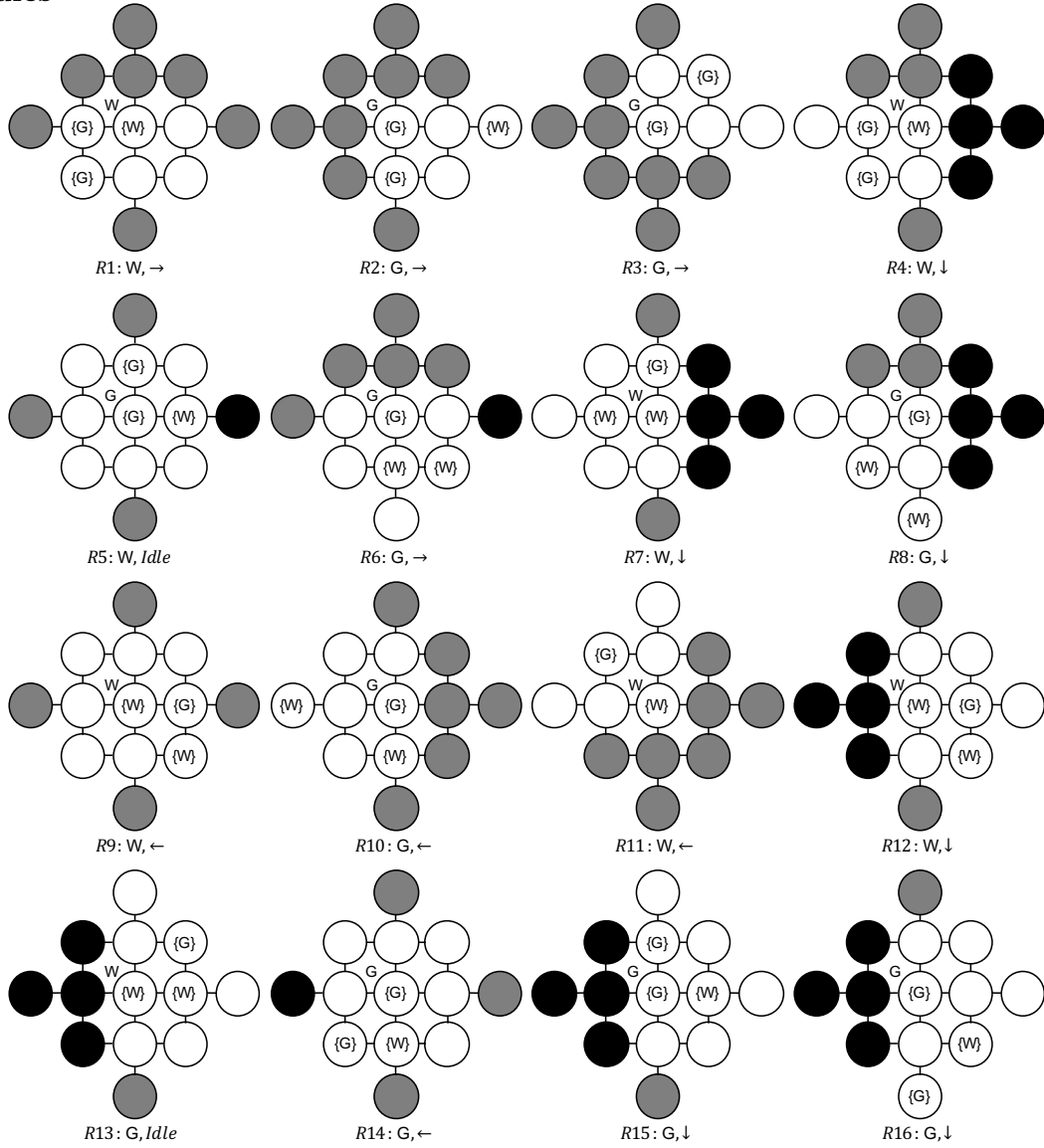
東への直進 初期状況から、ルール $R1$ によって、色 W のロボットが色 G のロボットから離れるように東へ移動し、状況は $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{G\})\}$ になる。この状況から、ルール $R2$ によって、 $v_{0,0}$ にいる色 G のロボットが色 W に近づくように東へ移動し、状況は $\{(v_{0,1}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{G\})\}$ になる。この状況から、ルール $R3$ によって、 $v_{1,0}$ にいる色 G のロボットが東へ移動し、状況は $\{(v_{0,1}, \{G\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,1}, \{G\})\}$ になる。以降、ロボットがグリッドの東端に到達するまでルール $R1$, $R2$, $R3$ が順番に繰り返し実行されることで、3体のロボットは東へ直進する。

Algorithm 15 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2, \ell = 2, k = 3$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{1,0}, \{G\})\}$$

Rules



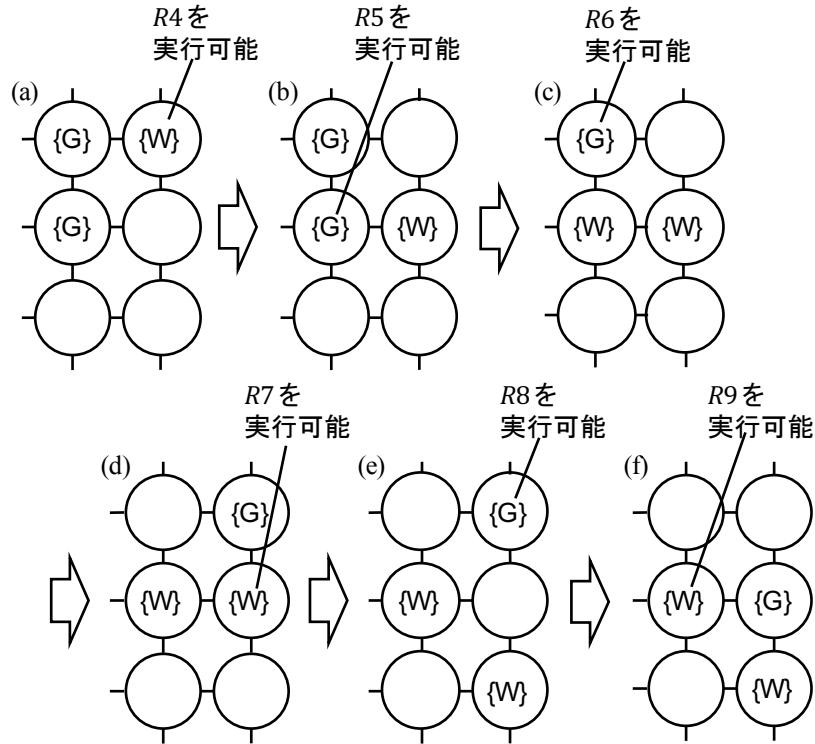


図 28: Algorithm 15 の実行における西への折り返し準備

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 28 に示す．東への直進を続けた 3 体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達する (図 28(a))．この状況から，ルール $R4$ によって色 W のロボットが南に進み，図 28(b) のような状況となる．この状況から，ルール $R5$ によって，より南側にいる色 G のロボットが自身の色を W に変え，図 28(c) のような状況となる．この状況から，ルール $R6$ によって色 G のロボットがグリッドの東端に移動し，図 28(d) のような状況となる．この状況から，ルール $R7$ によって，グリッドの東端にいる色 W のロボットが南に進み，図 28(e) のような状況となる．この状況から，ルール $R8$ によって色 G のロボットが南に進み，図 28(f) のような状況となる．

西への直進 図 28(f) の状況から，ルール $R9$ によって，より西側にいる色 W のロボットが他のロボットから離れるように西へ移動する．次に，ルール $R10$ によ

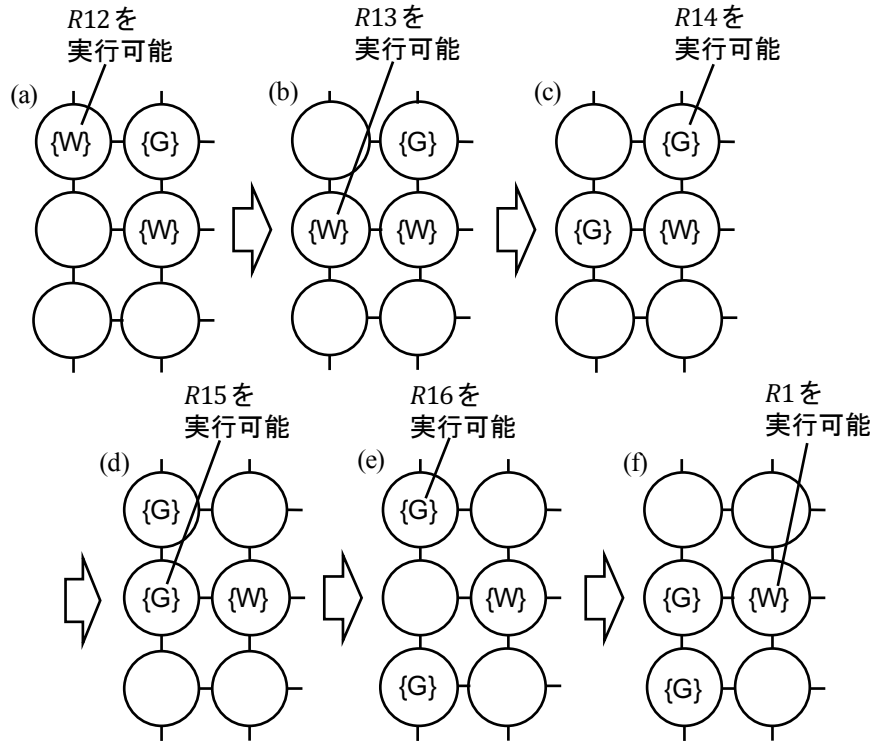


図 29: Algorithm 15 の実行における東への折り返し準備

て、色 G のロボットが自身との距離が 2 である色 W のロボットに近づくように西へ移動する．その後、ルール $R11$ によって、グリッドの東端にいる色 W のロボットが西へ移動する．以降、ロボットがグリッドの西端に到達するまでルール $R9$, $R10$, $R11$ が順番に繰り返し実行されることで、3 体のロボットは西へ直進する．

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 29 に示す．西への直進を続けた 3 体のロボットは、やがてグリッドの西端に到達する (図 29(a))．この状況から、ルール $R12$ によって、グリッドの西端にいる色 W のロボットが南に進み、図 29(b) のような状況となる．この状況から、ルール $R13$ によって、グリッドの西端にいる色 W のロボットが自身の色を G に変え、図 29(c) のような状況となる．この状況から、ルール $R14$ によって、より北側にいる色 G のロボットがグリッドの西端に移動し、図 29(d) のような状況となる．

この状況から、ルール $R15$ によって、より南側にいる色 G のロボットが南に進み、図 29(e) のような状況となる。この状況から、ルール $R16$ によって、より北側にいる色 G のロボットが南に進み、図 29(f) のような状況となる。この状況から 3 体のロボットは再び東へ直進することができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R12$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,1}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-2,n-1}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{G\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R4$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.12 非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 4$

非同期, $\phi = 2$, $\ell = 2$, 共通のキラリティに対する合意なし, $k = 4$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 16 に示す。

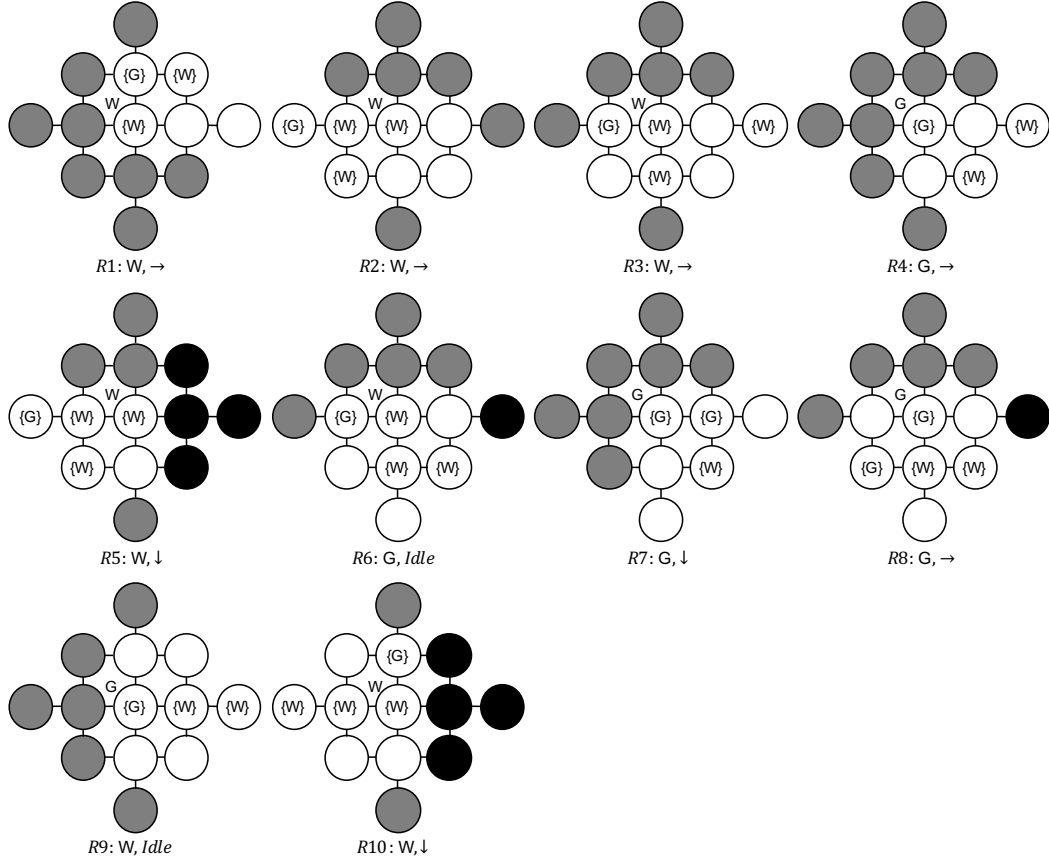
東への直進 アルゴリズムの実行における東への直進の過程を図 30 に示す。初期状況および東への折り返し準備直後では、4 体のロボットは図 30(a) のような隊列を形作っている。この状況から、ルール $R1$ によって、最も西側にいる色 W のロボットが東へ進み、状況は図 30(b) のようになる。この状況から、ルール $R2$ によって、最も東側にいる色 W のロボットが東へ進み、状況は図 30(c) のように

Algorithm 16 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 2$, $\ell = 2$,
 $k = 4$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{W\})\}$$

Rules



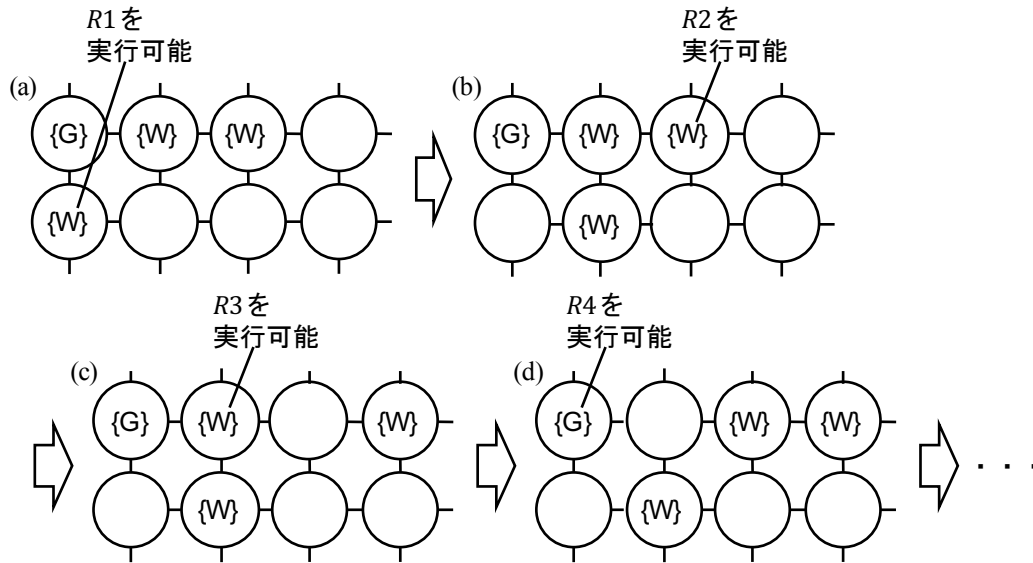


図 30: Algorithm 16 の実行における東への直進

なる．この状況から，ルール $R3$ によって，色 G のロボットに隣接している色 W のロボットが東へ進み，状況は図 30(d) のようになる．この状況から，ルール $R4$ によって色 G のロボットが東へ進む．結果，4 体のロボットは東へ距離 1 だけ進んだ状態で図 30(a) のような隊列を再び形作る．以降，ロボットがグリッドの東端に到達するまでルール $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ が順番に繰り返し実行されることで，4 体のロボットは東へ直進する．

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 31 に示す．東への直進を続けた 4 体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達し，状況は図 31(a) のようになる．この状況から，ルール $R5$ によって，グリッドの東端にいる色 W のロボットが南に進み，状況は図 31(b) のようになる．この状況から，ルール $R6$ によって，色 G のロボットに隣接している色 W のロボットが自身の色を G に変え，状況は図 31(c) のようになる．この状況から，ルール $R7$ によって，より西側にいる色 G のロボットが南に進み，状況は図 31(d) のようになる．この状況から，ルール $R8$ によって，より北側にいる色 G のロボットがグリッドの東端に移動し，状況は図 31(e) のようになる．この状況から，ルー

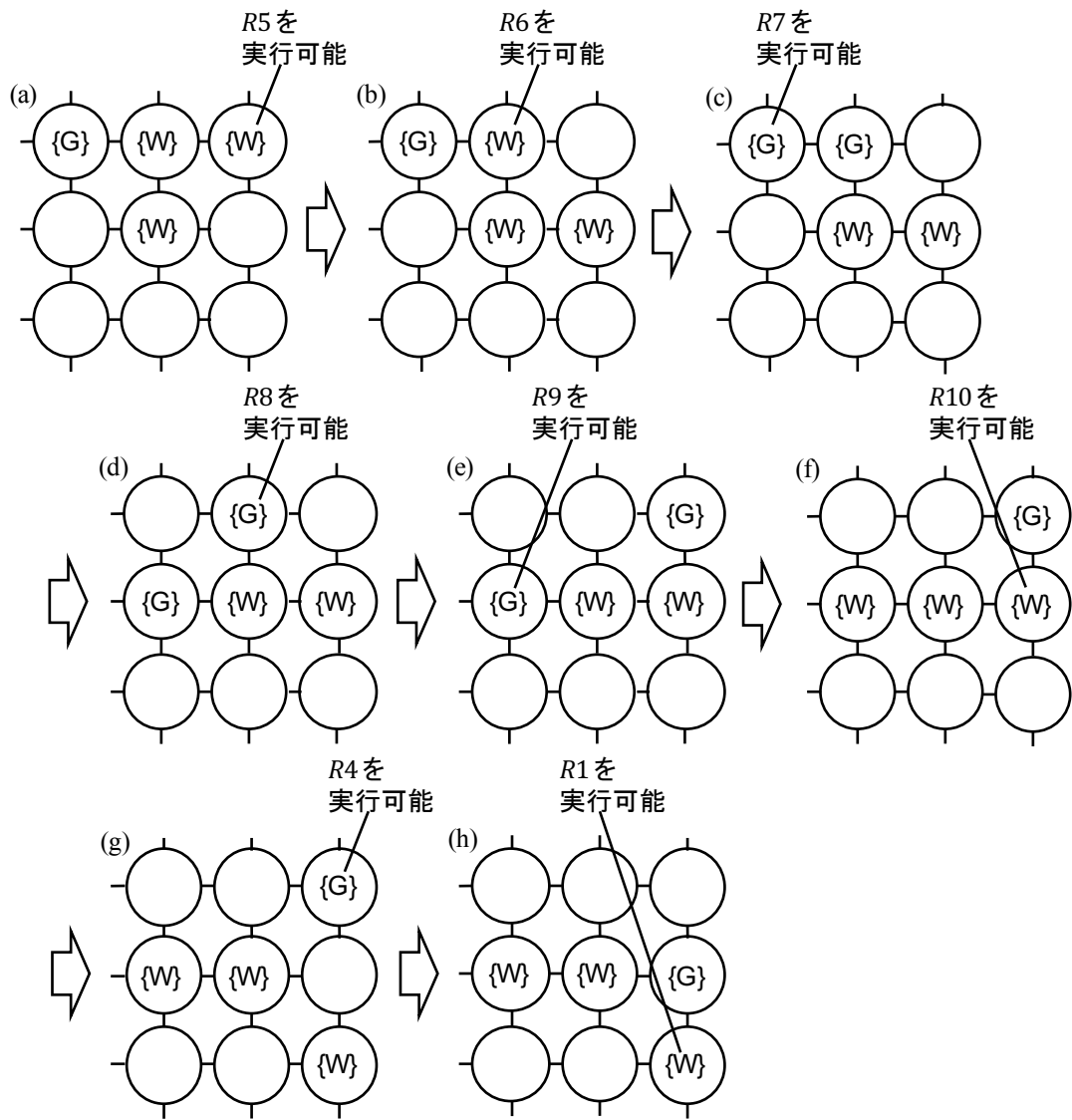


図 31: Algorithm 16 の実行における西への折り返し準備

ル $R9$ によって、より西側にいる色 G のロボットが自身の色を W に変え、状況は図 31(f) のようになる。この状況から、ルール $R10$ によって、グリッドの東端にいる色 W のロボットが南に進み、状況は図 31(g) のようになる。この状況から、ルール $R4$ によって色 G のロボットが南に進み、状況は図 31(h) のようになる。

西への直進，東への折り返し準備 図 31(h) の状況でロボットが形作っている隊列は、ロボットが東へ直進するときに形作っていた隊列 (図 30(a)) と鏡像の関係にある。よって、ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1, R2, R3, R4$ によって西へ直進することができる。同様に、西への折り返し準備をするときと同じルールによって、ロボットは東への折り返し準備をすることができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{W\}), (v_{m-2,1}, \{W\}), (v_{m-2,2}, \{G\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,0}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R5$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,0}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,1}, \{W\}), (v_{m-2,2}, \{G\}), (v_{m-1,0}, \{W\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、状況は $\{(v_{m-2,n-3}, \{G\}), (v_{m-2,n-2}, \{W\}), (v_{m-2,n-1}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{W\})\}$ になる。このとき、 $v_{m-1,n-1}$ はまだ訪問されていない。この状況から、ルール $R5$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-1,n-1}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,n-3}, \{G\}), (v_{m-2,n-2}, \{W\}), (v_{m-1,n-2}, \{W\}), (v_{m-1,n-1}, \{W\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

4.4.13 非同期, $\phi = 1, \ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$

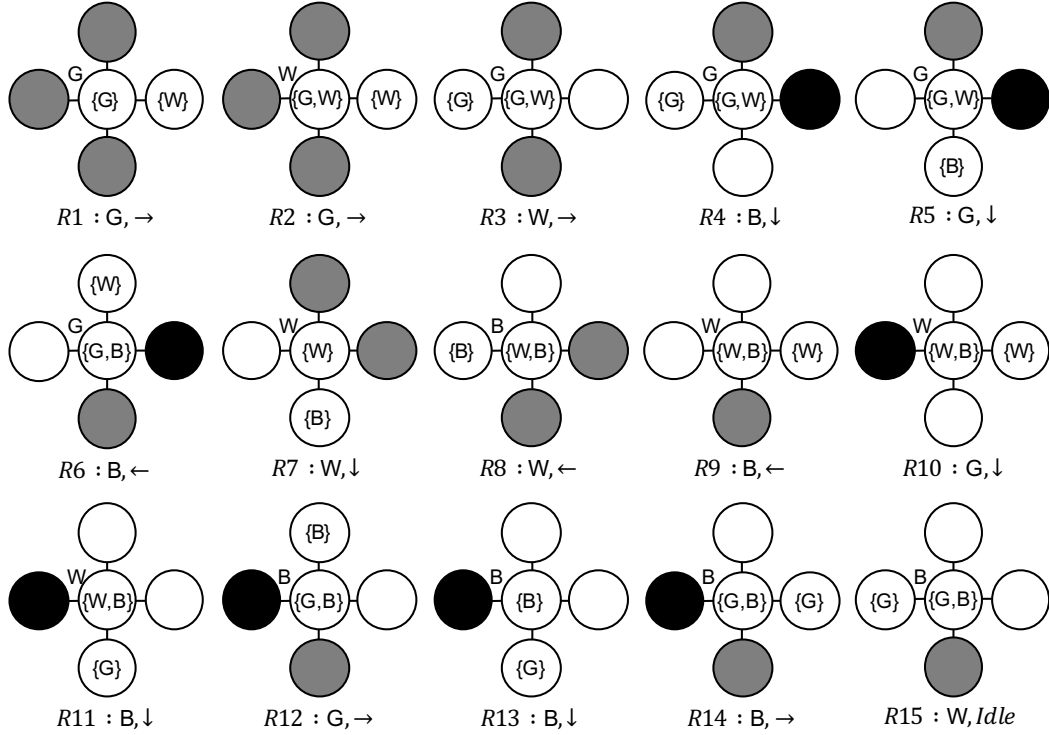
非同期, $\phi = 1, \ell = 3$, 共通のキラリティに対する合意あり, $k = 3$ という条件で、初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 2, n \geq 3$)

Algorithm 17 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1, \ell = 3, k = 3$ with Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\})\}$$

Rules



の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 17 に示す。

東への直進 アルゴリズムの実行における東への直進の過程を図 32 に示す．初期状況および東への折り返し準備直後では，3 体のロボットは図 32(a) のような隊列を形作っている．この状況から，ルール $R1$ によって色 G のロボットが東へ進み，状況は図 32(b) のようになる．この状況から，ルール $R2$ によって，色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが，自身の色を G に変えてから東へ進む．非同期モデルでは，この色 W のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 32(c) のような状況が発生し，この状況において他のロボットが LCM サイクルを実行するかもしれない．しかしながら，この状況において他の

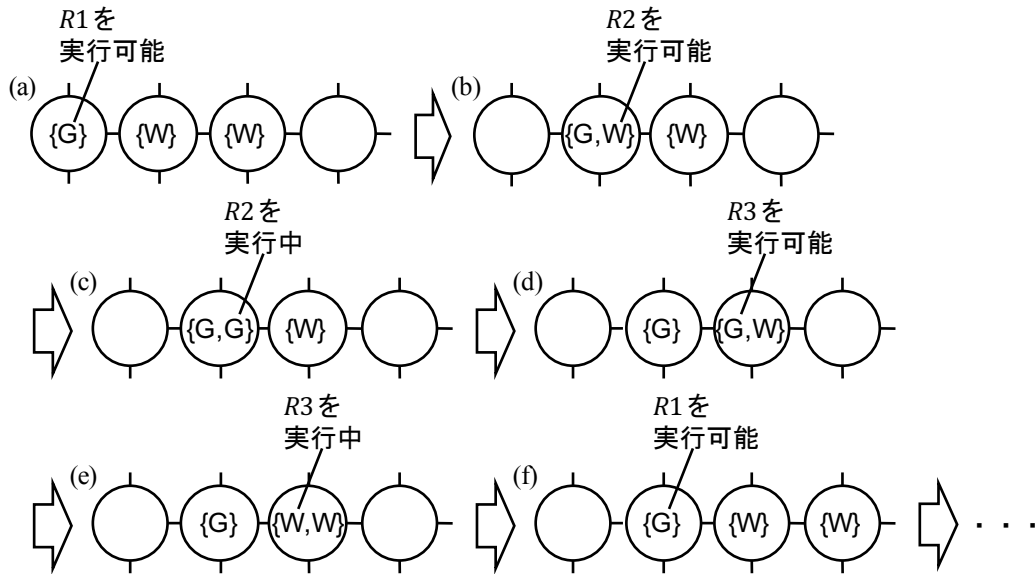


図 32: Algorithm 17 の実行における東への直進

ロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 32(d) のようになる．この状況から，ルール $R3$ によって，色 W のロボットと同じノードにいる色 G のロボットが，自身の色を W に変えてから東へ進む．非同期モデルでは，この色 G ロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 32(e) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，3 体のロボットは東へ距離 1 だけ進んだ状態で図 32(a) のような隊列を再び形作る (図 32(f))．以降，ロボットがグリッドの東端に到達するまでルール $R1$, $R2$, $R3$ が順番に繰り返し実行されることで，3 体のロボットは東へ直進する．

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返し準備の過程を図 33 に示す．東への直進を続けた 3 体のロボットは，やがてグリッドの東端に到達し，状況は図 33(a) のようになる．この状況から，ルール $R4$ によって，色 W のロボットと同じノードにいる色 G のロボットが，自身の色を B に変えてから南に進む．非同期モデルでは，この色 G のロボットが自身の色を変えてから移動す

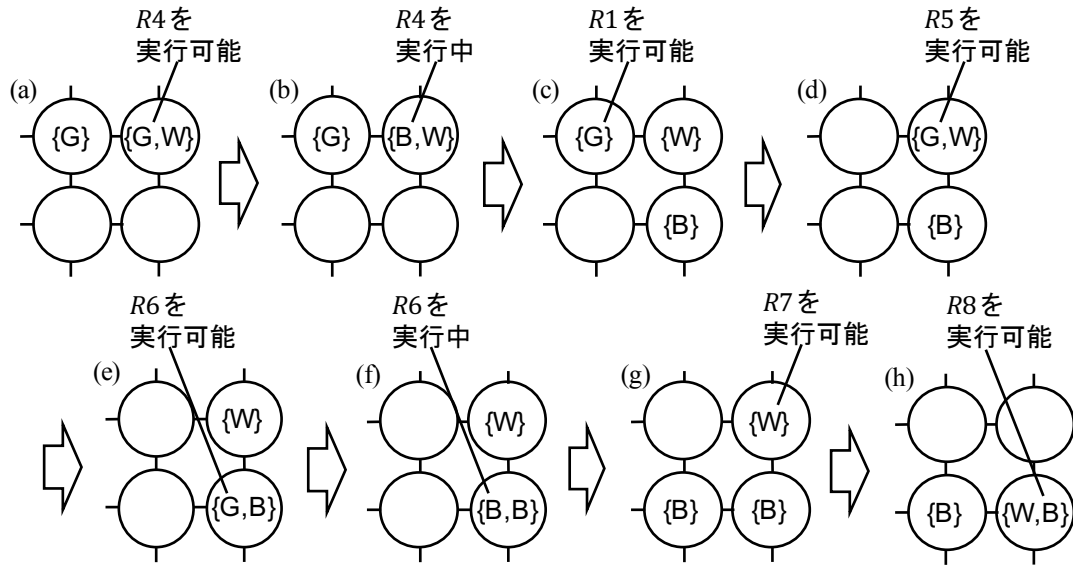


図 33: Algorithm 17 の実行における西への折り返し準備

るまでに図 33(b) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果、状況は図 33(c) のようになる．この状況から、ルール $R1$ によって色 G のロボットがグリッドの東端に移動し、状況は図 33(d) のようになる．この状況から、ルール $R5$ によって色 G のロボットが南に進み、状況は図 33(e) のようになる．この状況から、ルール $R6$ によって、色 G のロボットが自身の色を B に変えてから西へ進む．非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 33(f) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果、状況は図 33(g) のようになる．この状況から、ルール $R7$ によって色 W のロボットが南に進み、状況は図 33(h) のようになる．

西への直進 アルゴリズムの実行における西への直進の過程を図 34 に示す．図 34(a) でロボットは図 33(h) と同様の隊列を形作っている．この状況から、ルール $R8$ によって、色 W のロボットと同じノードにいる色 B のロボットが自身の色を W に変えてから西へ進む．非同期モデルでは、この色 B のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 34(b) のような状況が発生するが、この状況におい

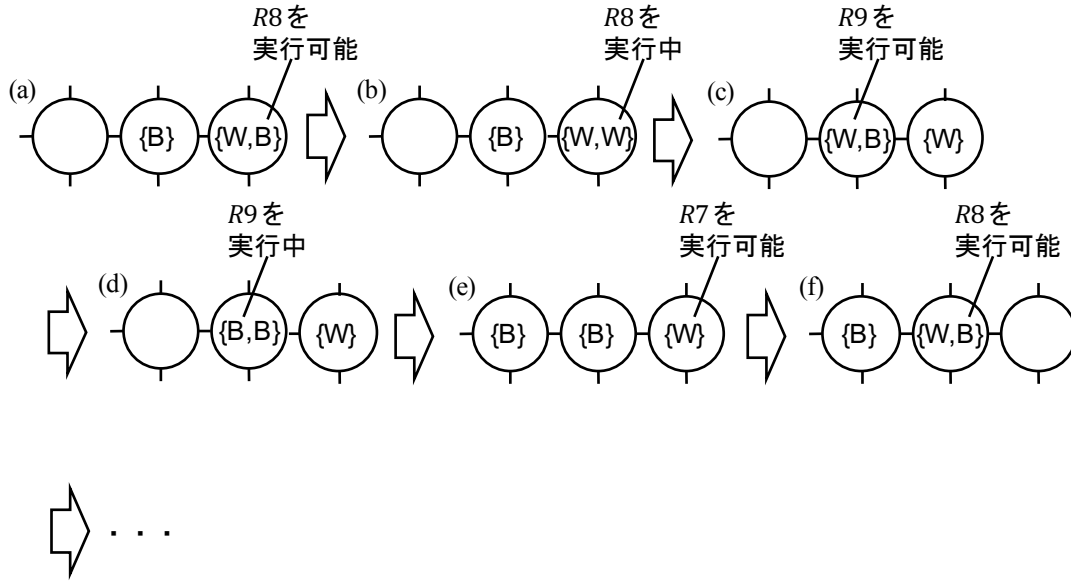


図 34: Algorithm 17 の実行における西への直進

て他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 34(c) になる．この状況から，ルール $R9$ によって，色 B のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが自身の色を B に変えてから西へ進む．非同期モデルでは，この色 W のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 34(d) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 34(e) になる．この状況から，ルール $R7$ によって色 W のロボットが西へ進む．結果，3 体のロボットは西へ距離 1 だけ進んだ状態で図 34(a) のような隊列を再び形作る (図 34(f))．以降，ロボットがグリッドの西端に到達するまでルール $R8$ ， $R9$ ， $R7$ が順番に繰り返し実行されることで，3 体のロボットは西へ直進する．

東への折り返し準備 アルゴリズムの実行における東への折り返し準備の過程を図 35 に示す．西への直進を続けた 3 体のロボットは，やがてグリッドの西端に到達し，状況は図 35(a) になる．この状況から，ルール $R10$ によって，色 B のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが，自身の色を G に変えてから南

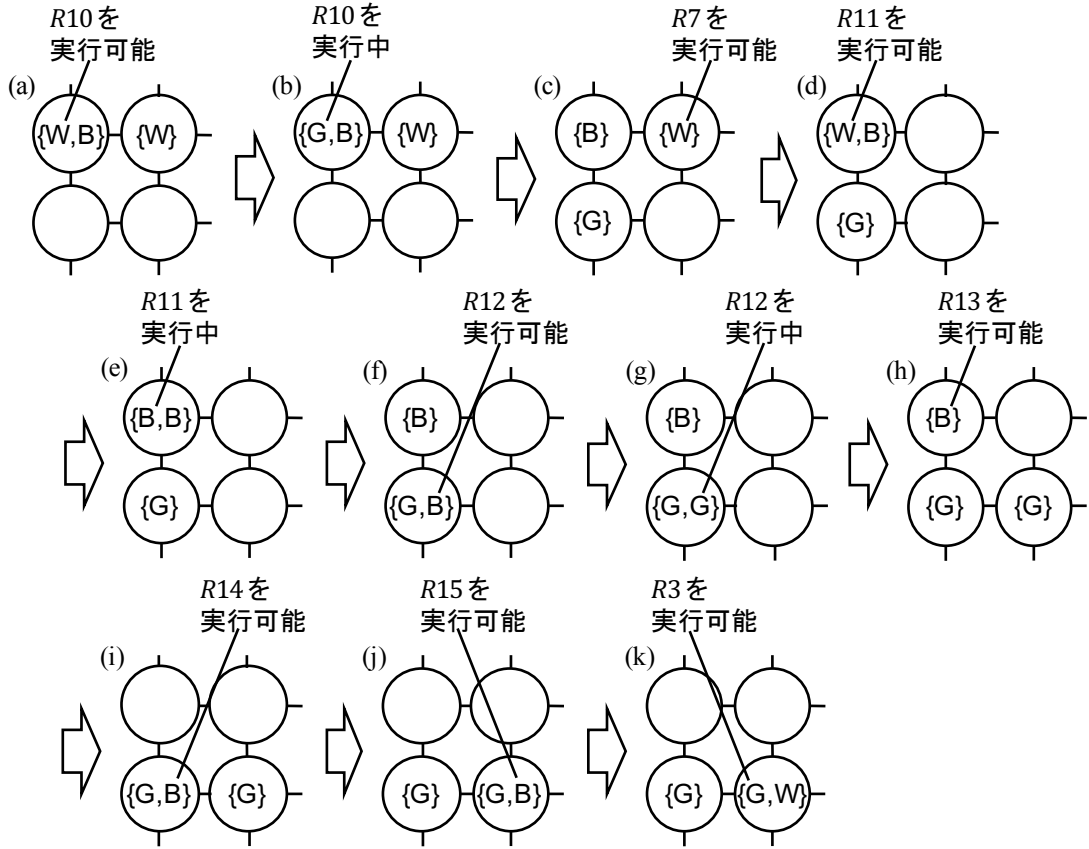


図 35: Algorithm 17 の実行における東への折り返し準備

に進む．非同期モデルでは，この色 W のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 35(b) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 35(c) のようになる．この状況から，ルール $R7$ によって色 W のロボットがグリッドの西端に移動し，状況は図 35(d) のようになる．この状況から，ルール $R11$ によって，色 B のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが，自身の色を B に変えてから南に進む．非同期モデルでは，この色 W のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 35(e) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 35(f) のようになる．この状況から，ルール $R12$ によって，色 G のロボットと同じノードにいる色 B のロボットが，

自身の色を G に変えてから東に進む．非同期モデルでは，この色 B のロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 35(g) のような状況が発生するが，この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない．結果，状況は図 35(h) のようになる．この状況から，ルール $R13$ によって色 B のロボットが南に進み，状況は図 35(i) のようになる．この状況から，ルール $R14$ によって色 B のロボットが東へ進み，状況は図 35(j) のようになる．この状況から，ルール $R15$ によって色 B のロボットが自身の色を W に変え，状況は図 35(k) のようになる．この状況では，ロボットは図 32(d) と同様の隊列を形作っている．よって，この状況から 3 体のロボットは再び東へ直進することができる．

探索の終了 m が奇数の場合，3 体のロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する．やがて，ロボットは南東の隅に到達し，状況は $\{(v_{m-1,n-2}, \{G\}), (v_{m-1,n-1}, \{G, W\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない． m が偶数の場合，3 体のロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する．やがて，ロボットは南西の隅に到達し，状況は $\{(v_{m-1,0}, \{W, B\}), (v_{m-1,1}, \{W\})\}$ になる．この状況では，いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず，以降はどのロボットもルールを実行しない．このようにして，ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり，停止探索を達成できる．

4.4.14 非同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 3$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 6$

非同期， $\phi = 1$ ， $\ell = 3$ ，共通のキラリティに対する合意なし， $k = 6$ という条件で，初期状況 $\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{W, B\}), (v_{1,1}, \{W\})\}$ から $m \times n$ グリッド ($m \geq 3, n \geq 3$) の停止探索を達成するアルゴリズムを Algorithm 18 に示す．

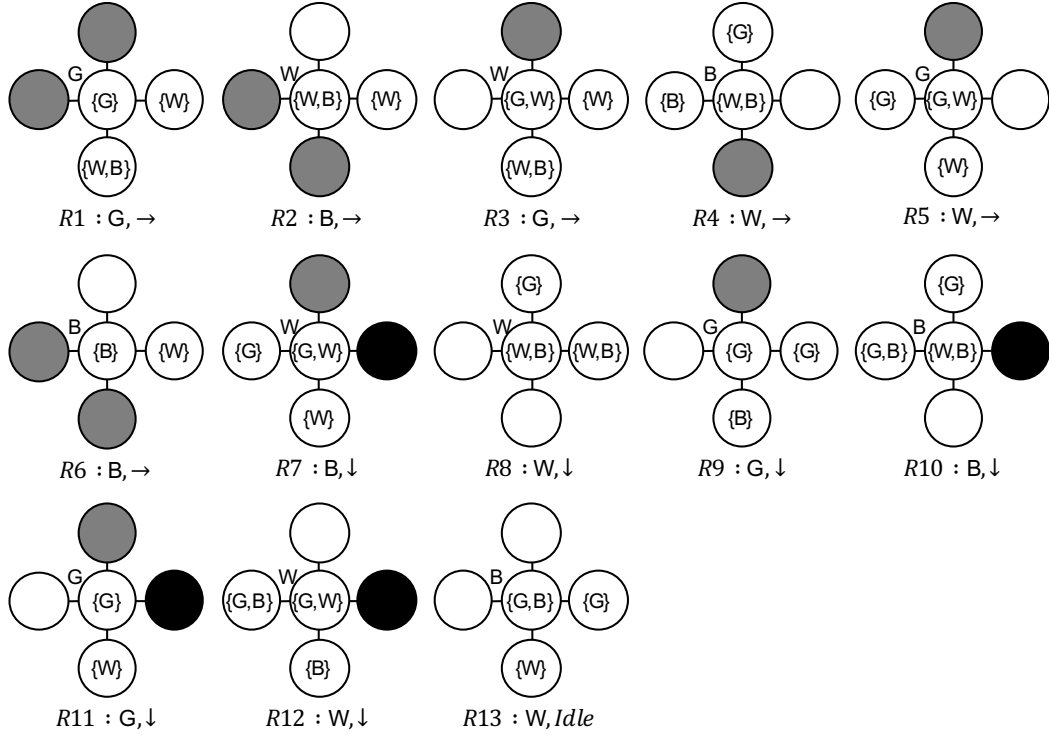
東への直進 アルゴリズムの実行における東への直進の過程を図 36，図 37 に示す．初期状況および東への折り返し準備直後では，6 体のロボットは図 36(a) のような隊列を形作っている．この状況から，ルール $R1$ によって色 G のロボット

Algorithm 18 Asynchronous Terminating Grid Exploration for $\phi = 1$, $\ell = 3$, $k = 6$ Without Common Chirality

Initial configuration

$$\{(v_{0,0}, \{G\}), (v_{0,1}, \{W\}), (v_{0,2}, \{W\}), (v_{1,0}, \{W, B\}), (v_{1,1}, \{W\})\}$$

Rules



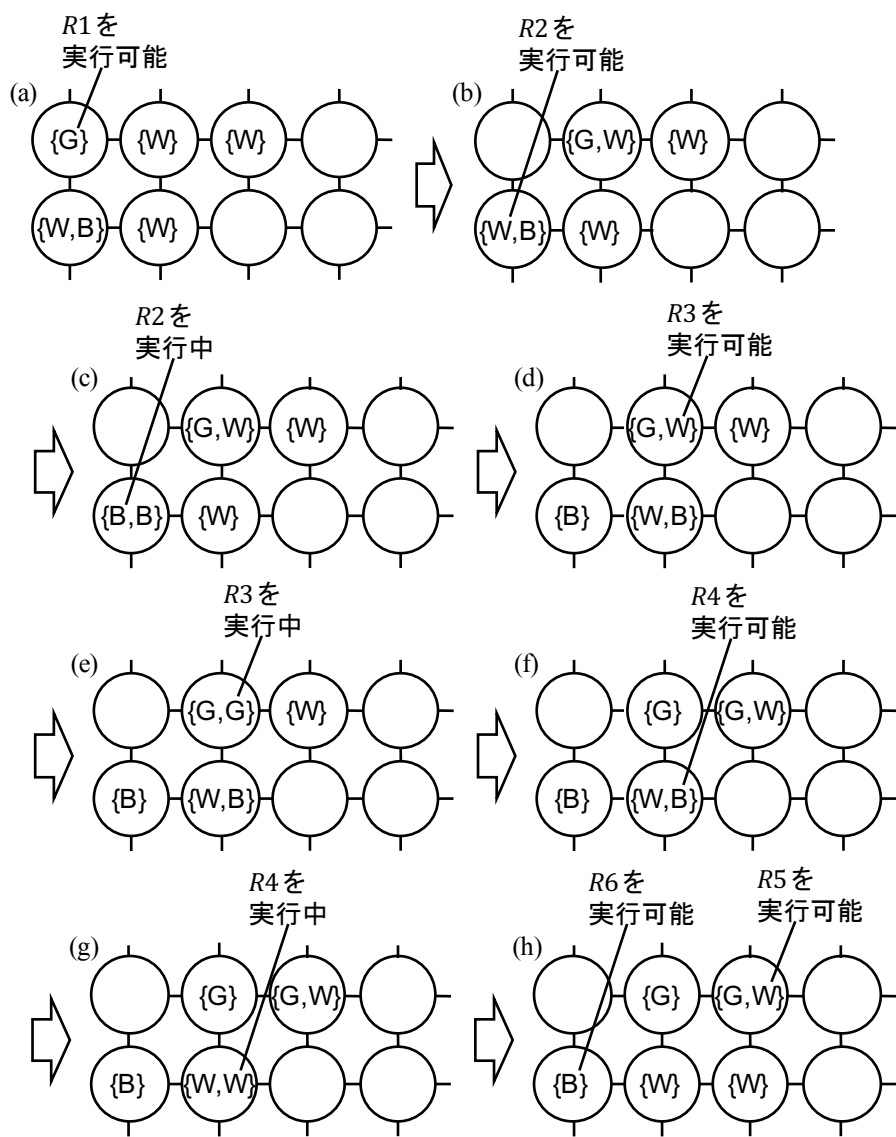


図 36: Algorithm 18 の実行における東への直進（前半）

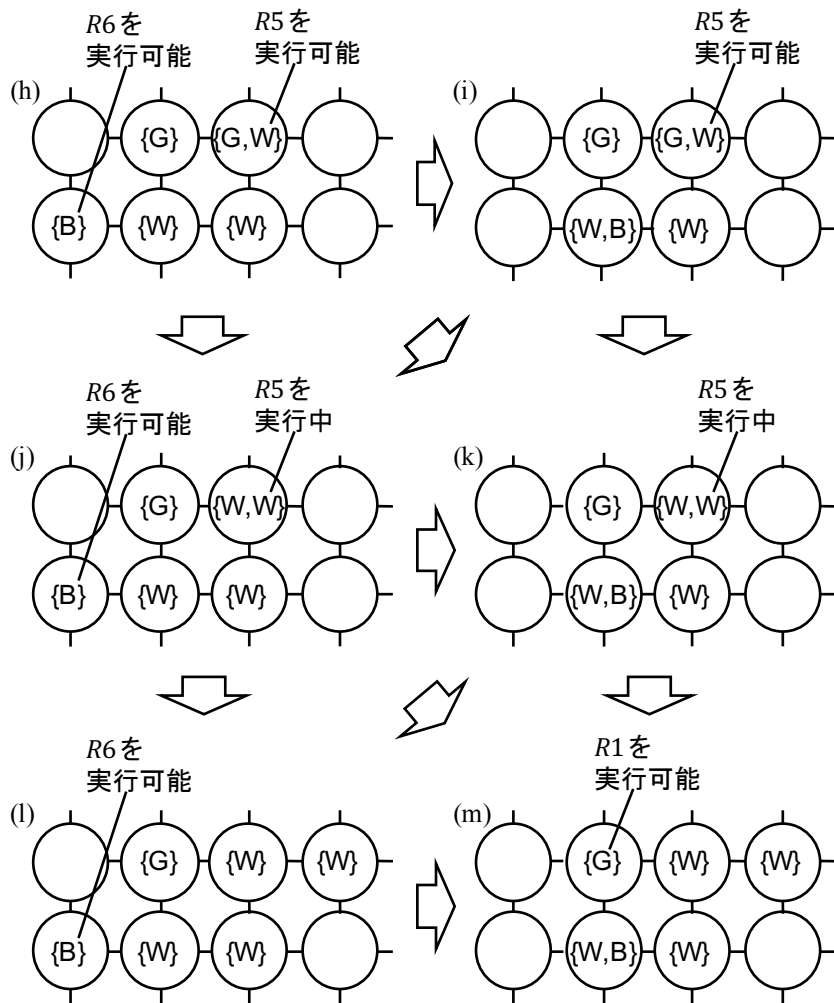


図 37: Algorithm 18 の実行における東への直進（後半）

が東へ進み、状況は図 36(b) のようになる。この状況から、ルール $R2$ によって、色 B のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが、自身の色を B に変えてから東へ進む。非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 36(c) のような状況が発生し、この状況において他のロボットが LCM サイクルを実行するかもしれない。しかしながら、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない。結果、状況は図 36(d) のようになる。この状況から、ルール $R3$ によって、色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが、自身の色を G に変えてから東へ進む。非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 36(e) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない。結果、状況は図 36(f) のようになる。この状況から、ルール $R4$ によって、色 W のロボットと同じノードにいる色 B のロボットが、自身の色を W に変えてから東へ進む。非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 36(g) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない。結果、状況は図 36(h) のようになる。

図 37(h) は図 36(h) と同じ状況を表している。この状況から、ロボットが LCM サイクルを実行する順番に関わらず、やがて状況が図 37(m) のようになることを述べる。図 37(h) の状況では、色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットがルール $R5$ を、色 B のロボットがルール $R6$ を実行することができる。 $R5$ の実行が始まるより前 ($R5$ を実行するロボットが計算フェーズを行うより前) に $R6$ の実行が終わる ($R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行う) のであれば、状況は図 37(i) のようになる。 $R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行うより前に、 $R5$ を実行するロボットが計算フェーズを行うのであれば、状況は図 37(j) のようになる。 $R5$ を実行するロボットの計算フェーズと $R6$ を実行するロボットの移動フェーズが同時に行われるのであれば、状況は図 37(k) のようになる。図 37(i), (k) の状況では、 $R5$ 以外にロボットが実行可能なルールが存在せず、やがて状況は図 37(m) のようになる。図 37(j) の状況では、 $R5$ と $R6$ 以外に実行可能なルールは存在しない。この状況から、 $R5$ を実行するロボットが移動フェーズを行うより前に、 $R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行うのであれば、状

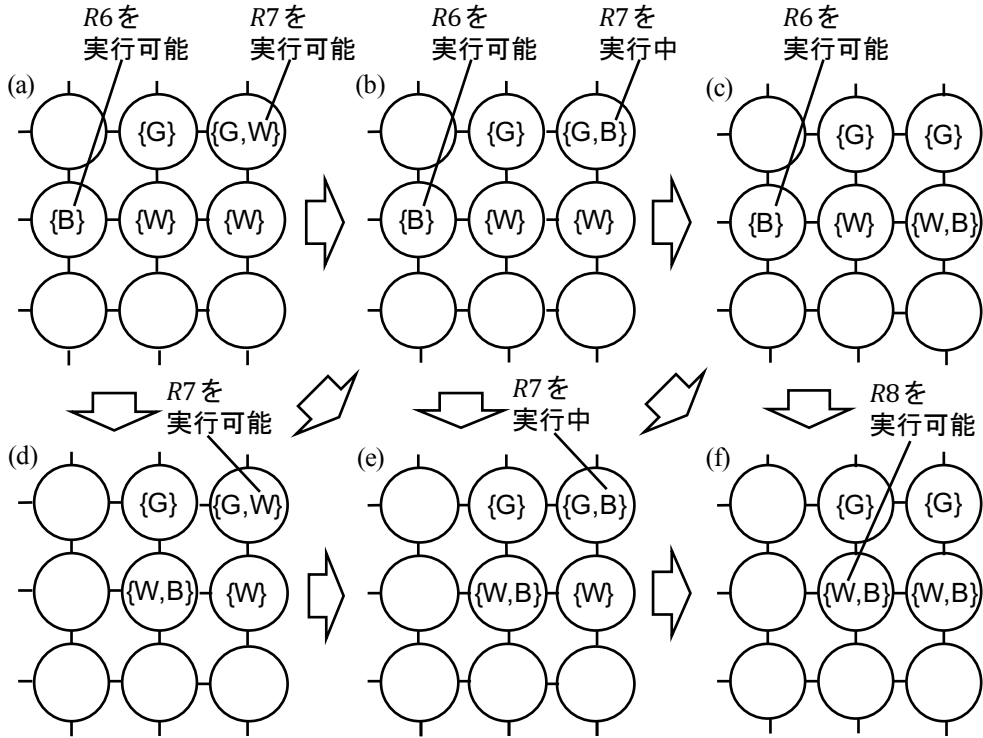


図 38: Algorithm 18 の実行における西への折り返し（前半）

況は図 37(k) のようになる． $R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行うより前に， $R5$ を実行するロボットが移動フェーズを行うのであれば，状況は図 37(l) のようになる． $R5$ を実行するロボットの移動フェーズと $R6$ を実行するロボットの移動フェーズが同時に行われるのであれば，状況は図 37(m) のようになる．図 37(l) の状況では， $R6$ 以外にロボットが実行可能なルールが存在せず，やがて状況は図 37(m) のようになる．いずれの場合も，やがて状況は図 37(m) のようになる．結果，6 体のロボットは東へ距離 1 だけ進んだ状態で図 36(a) のような隊列を再び形作る．以降，ロボットがグリッドの東端に到達するまで，6 体のロボットは東へ直進する．

西への折り返し準備 アルゴリズムの実行における西への折り返しの過程を図 38, 図 39 に示す．東への直進を続けた 6 体のロボットは，やがてグリッドの東端に

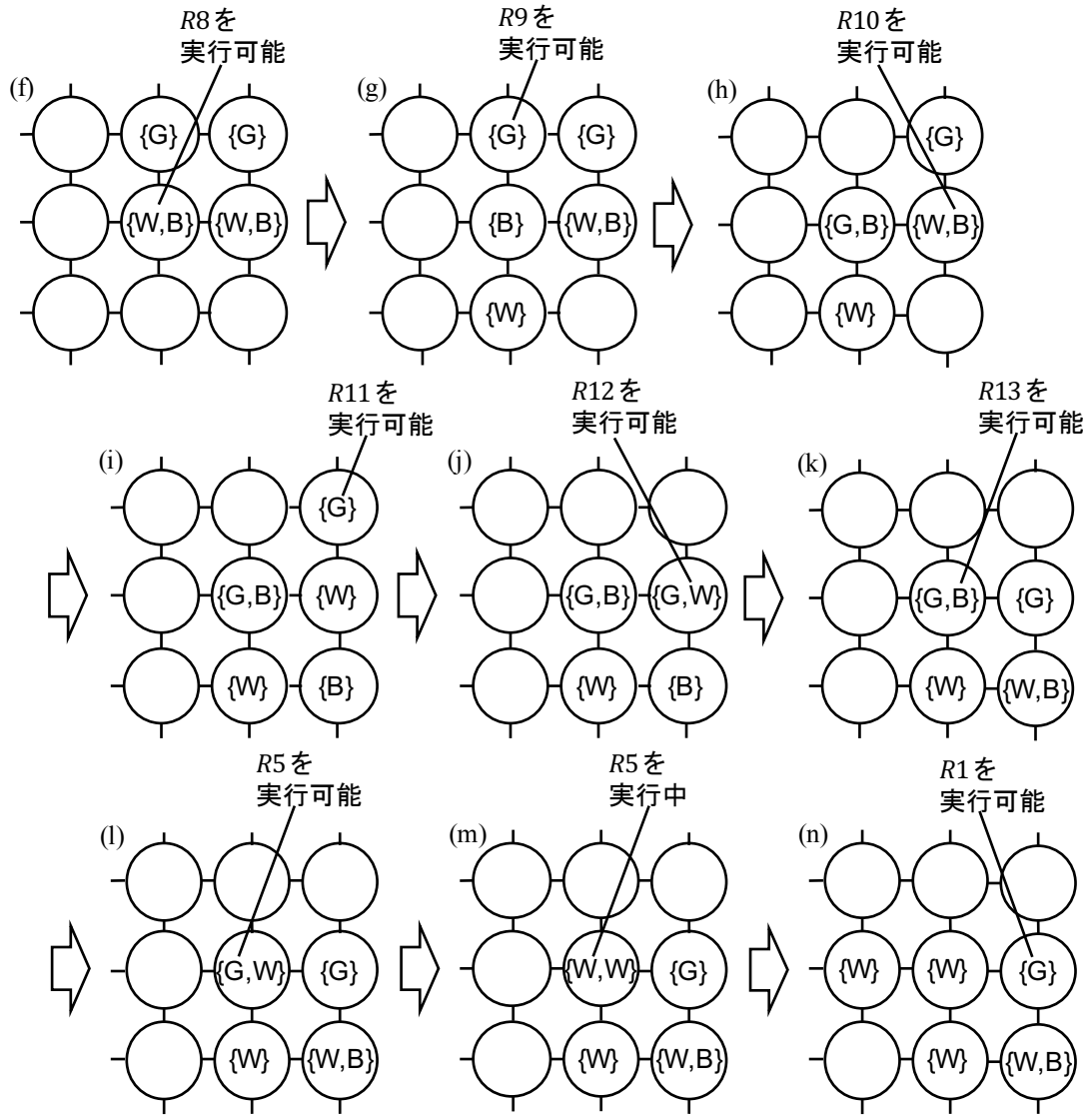


図 39: Algorithm 18 の実行における西への折り返し（後半）

到達し、状況は図 38(a) のようになる。この状況では、色 B のロボットがルール $R6$ を、色 W のロボットと同じノードにいる色 G のロボットがルール $R7$ を実行することができる。 $R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行うより前に、 $R7$ を実行するロボットが移動フェーズを行うのであれば、状況は図 38(b) のようになる。この状況では、 $R6$ 以外にロボットが実行可能なルールが存在せず、やがて状況は図 38(d) のようになる。 $R7$ を実行するロボットが移動フェーズを行うより前に、 $R6$ を実行するロボットが移動フェーズを行うのであれば、状況は図 38(c) のようになる。この状況では、 $R6$ 以外にロボットが実行可能なルールが存在せず、やがて状況は図 38(d) のようになる。 $R6$ を実行するロボットの移動フェーズと $R7$ を実行するロボットの移動フェーズが同時に行われるのであれば、状況は直接、図 38(d) のようになる。図 38(d) の状況から、ルール $R1$ によって、自身のいるノードに他のロボットがいない色 G のロボットがグリッドの東端に移動し、状況は図 38(e) のようになる。この状況から、ルール $R8$ によって、色 B のロボットが自身の色を W に変えてから西へ移動する。非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 38(f) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない。結果、状況は図 38(g) のようになる。

図 39(g) は図 38(g) と同じ状況を表している。この状況から、ルール $R9$ によって、より南側の色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが自身の色を B に変え、状況は図 39(h) のようになる。この状況から、ルール $R10$ によって、より北側にいる色 W のロボットが南に進み、状況は図 39(i) のようになる。この状況から、ルール $R11$ によって色 B のロボットが南に進み、状況は図 39(j) のようになる。この状況から、ルール $R12$ によって、色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが南に進み、状況は図 39(k) のようになる。この状況から、ルール $R13$ によって、より北側にいる G のロボットが自身の色を W に変えてから南に進む。非同期モデルでは、このロボットが自身の色を変えてから移動するまでに図 39(l) のような状況が発生するが、この状況において他のロボットが実行できるようなルールは存在しない。結果、状況は図 39(m) のようになる。この状況から、ルール $R14$ によって、色 B のロボットと同じノードにいる色 W のロ

ボットが西に進み、状況は図 39(n) のようになる。この状況から、ルール $R15$ によって、色 G のロボットと同じノードにいる色 W のロボットが南に進み、状況は図 39(o) のようになる。

西への直進、東への折り返し準備 図 39(o) の状況でロボットが形作っている隊列は、ロボットが東へ直進するとき形作っていた隊列 (図 36(a)) と鏡像の関係にある。よって、ロボットは東へ直進するときと同じルール $R1$, $R2$, $R3$, $R4$, $R5$, $R6$ によって西へ直進することができる。同様に、西への折り返し準備をするときと同じルールによって、ロボットは東への折り返し準備をすることができる。

探索の終了 m が奇数の場合、ロボットは西に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、ロボットは南西の隅に到達し、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G, W\}), (v_{m-1,0}, \{G, W\}), (v_{m-1,1}, \{W, B\})\}$ になる (これは、図 38(e) で形作られている隊列の鏡像をロボットが形作っている状況である)。この状況から、ルール $R14$ によって、 $v_{m-1,1}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-2,1}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G, W\}), (v_{m-2,1}, \{W\}), (v_{m-1,0}, \{G, W\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ になる。この状況から、ルール $R9$ によって、 $v_{m-2,0}$ にいる色 W のロボットが自身の色を B に変え、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G, B\}), (v_{m-2,1}, \{W\}), (v_{m-1,0}, \{G, W\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。 m が偶数の場合、ロボットは東に直進しながら南端のノードを順に訪問する。やがて、ロボットは南東の隅に到達し、状況は $\{(v_{m-2,n-1}, \{G, W\}), (v_{m-1,n-2}, \{W, B\}), (v_{m-1,n-1}, \{G, W\})\}$ になる (これは、図 38(e) で形作られている隊列と同じ隊列をロボットが形作っている状況である)。この状況から、ルール $R14$ によって、 $v_{m-1,n-2}$ にいる色 W のロボットが $v_{m-2,n-2}$ に移動し、状況は $\{(v_{m-2,n-2}, \{W\}), (v_{m-2,n-1}, \{G, W\}), (v_{m-1,n-2}, \{B\}), (v_{m-1,n-1}, \{G, W\})\}$ になる。この状況から、ルール $R9$ によって、 $v_{m-2,n-1}$ にいる色 W のロボットが自身の色を B に変え、状況は $\{(v_{m-2,0}, \{G, B\}), (v_{m-2,1}, \{B\}), (v_{m-1,0}, \{G, W\}), (v_{m-1,1}, \{B\})\}$ になる。この状況では、いずれかのロボットが実行可能なルールは存在せず、以降はどのロボットもルールを実行しない。このようにして、ロボットは全ノードを訪問した後にルールを実行しなくなり、停止探索を達成できる。

5. まとめ

本論文では、視界に制限がありライトを持つ自律移動ロボットによるグラフ探索アルゴリズムについて検討した。各ロボットは定数 ℓ 個の色の集合からライトの色を1つ選んでメモリとして保持することができる。また、各ロボットはグラフ上で定数距離 ϕ 以内のノードにいるロボットの位置とライトの色を観測することができる。本論文では、探索の対象としてリングと有限グリッドの2種類のグラフを扱った。

リング探索についての先行研究で、 $\phi = 1$ かつ $\ell \geq 2$ の場合が考えられ、永続探索と停止探索の達成に必要なロボット数が明らかにされている。ここで、 $\phi \geq 2$ とした場合に必要なロボット数は減るだろうかという疑問が湧いてくる。本論文では、 $\phi \geq 2$ かつ $\ell \geq 2$ という条件でのリング探索を扱い、完全同期、半同期、非同期モデルのいずれの場合も次の2点が成り立つことを証明した。(1) 永続探索の達成に2体のロボットが必要十分である。(2) 停止探索の達成に3体のロボットが必要十分である。これにより、上述の疑問に対する回答を次のとおり示した。(i) 完全同期モデルでは、必要なロボット数を減らすことはできない。(ii) 半同期、非同期モデルでは、必要なロボット数を1体減らすことができる。また、永続探索については $\ell = 2$ 、ロボット数2の場合に提案アルゴリズムが万能であること、停止探索については $\ell = 2$ 、ロボット数3の場合に万能なアルゴリズムが存在しないことを示した。

有限グリッド探索については、ロボットの視界に制限のあるモデルを扱った研究は筆者の知る限り存在しなかった。本論文では、様々な条件（同期モデル、 ϕ と ℓ の値、共通のキラリティに対する合意の有無）のもと、有限グリッドの停止探索アルゴリズムを提案した。これにより、それらの条件において停止探索の達成に必要なロボット数の上界を示した。また、永続探索と停止探索に必要なロボット数の下界を示した。

今後の課題を3点挙げる。第1に、有限グリッドの永続探索アルゴリズムを検討することである。第2に、より低い能力のロボットでの有限グリッド探索の可解性を明らかにすることである。例えば、 $\phi = 1$ かつ $\ell = 1$ の場合に有限グリッド探索を達成できるか否かは、本論文で明らかにされていない。第3に、他のト

ポロジのグラフ探索や探索以外の問題について検討し， ϕ や ℓ の値と，問題を解くために必要なロボット数や可解性との関連を明らかにすることである．

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの方にご指導，ご協力を賜りました．ここに深謝の意を表します．

輪講や研究発表練習でのご助言，研究論文に対するご指摘など，本研究に関して熱心なご指導およびご鞭撻を賜りました主指導教員の井上美智子教授に，心より厚く御礼を申し上げます．また，マレーシア・日本国際工科院へのインターンシップのご機会を賜るなど，学生生活においても数多くの貴重な経験をさせていただいたことに深く感謝いたします．本論文をご精読いただき，学内での研究発表時にも貴重なご助言を賜りました副指導教員の笠原正治教授に心より感謝申し上げます．本研究を進めるにあたり，丁寧なご指導，ご鞭撻を賜りました副指導教員の天下福仁准教授に心より感謝申し上げます．また，研究論文の内容を明確で誤りのないものにするために何度も添削していただいたことに重ね重ね御礼を申し上げます．本研究を行うにあたり，ご支援を賜りました副指導教員の新谷道広助教に心より感謝申し上げます．学外での研究発表時に貴重なご意見を賜りました他大学の先生方に厚く御礼を申し上げます．2年間の学生生活を通じてお世話になった，ディペンダブルシステム学研究室の皆様には感謝いたします．最後に，私の学生生活を温かく見守ってくださった家族に感謝の意を表します．

参考文献

- [1] Hideki Ando, Yoshinobu Oasa, Ichiro Suzuki, and Masafumi Yamashita. Distributed memoryless point convergence algorithm for mobile robots with limited visibility. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 5, pp. 818–828, 1999.
- [2] Hideki Ando, Ichiro Suzuki, and Masafumi Yamashita. Formation and agreement problems for synchronous mobile robots with limited visibility. In *Proceedings of Tenth International Symposium on Intelligent Control*, pp. 453–460. IEEE, 1995.
- [3] Lélia Blin, Alessia Milani, Maria Potop-Butucaru, and Sébastien Tixeuil. Exclusive perpetual ring exploration without chirality. In *24th International Symposium on Distributed Computing*, pp. 312–327, 2010.
- [4] François Bonnet, Alessia Milani, Maria Potop-Butucaru, and Sébastien Tixeuil. Asynchronous exclusive perpetual grid exploration without sense of direction. In *15th International Conference on Principles of Distributed Systems*, pp. 251–265, 2011.
- [5] Quentin Bramas, Stéphane Devismes, and Pascal Lafourcade. Brief Announcement: Infinite Grid Exploration by Disoriented Robots. In *26th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity SIROCCO 2019*, L’Aquila, Italy, July 2019.
- [6] Jérémie Chalopin, Paola Flocchini, Bernard Mans, and Nicola Santoro. Network exploration by silent and oblivious robots. In *36th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, pp. 208–219, 2010.
- [7] Gianlorenzo D’Angelo, Gabriele Di Stefano, Ralf Klasing, and Alfredo Navarra. Gathering of robots on anonymous grids and trees without mul-

- tiplicity detection. *Theoretical Computer Science*, Vol. 610, pp. 158–168, 2016.
- [8] Shantanu Das, Paola Flocchini, Giuseppe Prencipe, Nicola Santoro, and Masafumi Yamashita. Autonomous mobile robots with lights. *Theoretical Computer Science*, Vol. 609, pp. 171–184, 2016.
 - [9] Ajoy Kumar Datta, Anissa Lamani, Lawrence L. Larmore, and Franck Petit. Ring exploration by oblivious agents with local vision. In *IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 347–356, 2013.
 - [10] Ajoy Kumar Datta, Anissa Lamani, Lawrence L. Larmore, and Franck Petit. Ring exploration by oblivious robots with vision limited to 2 or 3. In *15th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pp. 363–366, 2013.
 - [11] Bastian Degener, Barbara Kempkes, Tobias Langner, Friedhelm Meyer auf der Heide, Peter Pietrzyk, and Roger Wattenhofer. A tight runtime bound for synchronous gathering of autonomous robots with limited visibility. In *Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*, pp. 139–148. ACM, 2011.
 - [12] Stéphane Devismes, Anissa Lamani, Franck Petit, Pascal Raymond, and Sébastien Tixeuil. Optimal grid exploration by asynchronous oblivious robots. In *14th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pp. 64–76, 2012.
 - [13] Stéphane Devismes, Anissa Lamani, Franck Petit, and Sébastien Tixeuil. Optimal torus exploration by oblivious robots. In *Third International Conference on Networked Systems*, pp. 183–199, 2015.

- [14] Stéphane Devismes, Franck Petit, and Sébastien Tixeuil. Optimal probabilistic ring exploration by semi-synchronous oblivious robots. *Theoretical Computer Science*, Vol. 498, pp. 10–27, 2013.
- [15] Paola Flocchini, David Ilcinkas, Andrzej Pelc, and Nicola Santoro. Remembering without memory: Tree exploration by asynchronous oblivious robots. *Theoretical Computer Science*, Vol. 411, No. 14-15, pp. 1583–1598, 2010.
- [16] Paola Flocchini, David Ilcinkas, Andrzej Pelc, and Nicola Santoro. Computing without communicating: Ring exploration by asynchronous oblivious robots. *Algorithmica*, Vol. 65, No. 3, pp. 562–583, 2013.
- [17] Paola Flocchini, Giuseppe Prencipe, Nicola Santoro, and Peter Widmayer. Gathering of asynchronous robots with limited visibility. *Theoretical Computer Science*, Vol. 337, No. 1-3, pp. 147–168, 2005.
- [18] Nao Fujinaga, Yukiko Yamauchi, Hirotaka Ono, Shuji Kijima, and Masafumi Yamashita. Pattern formation by oblivious asynchronous mobile robots. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 44, No. 3, pp. 740–785, 2015.
- [19] Samuel Guilbault and Andrzej Pelc. Gathering asynchronous oblivious agents with local vision in regular bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 509, pp. 86–96, 2013.
- [20] Eman Hasan, Khaled Al-Wahedi, Belal Jumah, Diana W Dawoud, and Jorge Dias. Circle formation in multi-robot systems with limited visibility. In *Iberian Robotics conference*, pp. 323–336. Springer, 2017.
- [21] Anissa Lamani, Maria Gradinariu Potop-Butucaru, and Sébastien Tixeuil. Optimal deterministic ring exploration with oblivious asynchronous robots. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 183–196. Springer, 2010.

- [22] Fukuhito Ooshita and Sébastien Tixeuil. Ring exploration with myopic luminous robots. In Taisuke Izumi and Petr Kuznetsov, editors, *Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pp. 301–316, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [23] Andrzej Pelc and Anas Tiane. Efficient grid exploration with a stationary token. *International Journal of Foundations of Computer Science*, Vol. 25, No. 03, pp. 247–262, 2014.
- [24] Pavan Poudel and Gokarna Sharma. Universally optimal gathering under limited visibility. In *International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pp. 323–340. Springer, 2017.
- [25] Ichiro Suzuki and Masafumi Yamashita. Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 28, No. 4, pp. 1347–1363, 1999.

業績リスト

1. 長濱将太, 大下福仁, 井上美智子, “ 視界に制限のあるライト付きモバイルロボットによるリング探索,” 電子情報通信学会コンピューテーション研究会, vol.119, no.21, pp.83-90, 2019.5.
2. 長濱将太, 大下福仁, 井上美智子, “ 視界に制限のある自律移動ロボット群によるグリッド探索,” 第15回情報科学ワークショップ, 2019.9.
3. Shota Nagahama, Fukuhito Ooshita and Michiko Inoue, “ Ring exploration of myopic luminous robots with visibility more than one,” Proceedings of the 21st International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS), Oct. 2019. (Best student paper award 受賞)