

修士論文

Activity Driven ネットワークにおける平均合意問題の 収束性能解析

多川 純平

2019 年 3 月 5 日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報科学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
修士（理学）授与の要件として提出した修士論文である。

多川 純平

審査委員：

杉本 謙二 教授	（主指導教員）
笠原 正治 教授	（副指導教員）
松原 崇充 特任准教授	（副指導教員）
小蔵 正輝 助教授	（副指導教員）

Activity Driven ネットワークにおける平均合意問題の 収束性能解析*

多川 純平

内容梗概

今日、フォーメーションフライトやセンサネットワークなど、多様な分野において、マルチエージェントシステムが存在している。マルチエージェントシステムを対象とした重要な制御問題の一つに、合意問題がある。合意問題では、全エージェントが局所的な相互作用を通じて、特定の状態変数を一致させることを目指し、一致するに至る際の収束値や収束速度などを解析する。こうした合意問題は、ある時点での現実のネットワークを基にした静的ネットワークモデルや、隣接関係に確率が与えられた動的モデルが研究対象にされてきた。しかし、交通網や人間関係などの現実のネットワークを表現するためには、現実の時間変化に伴い頂点間の隣接関係が変化するような動的ネットワークモデルを用いること、そして、頂点自身が隣接関係を形成するようなネットワークモデルを用いることが重要である。

そこで、本論文では、activity-driven ネットワークと呼ばれる、各頂点の隣接関係が時間経過に伴い変化するようなネットワークモデルを用いた合意問題を検討する。特に、本論文では、activity-driven ネットワークの収束率の上界を計算することで、収束性能を検討する。また、activity-driven ネットワークの収束性能解析に関して従来法を用いての計算が困難であることを示し、その課題に対し、現実のネットワークが疎であることに注目し、高々1つの頂点が隣接するような疎な activity-driven ネットワークを提案する。それに伴い、疎な activity-driven ネットワークの構造に規則性を証明し、収束性能解析を容易に行う方法を提案する。

また、論文共著者関係をはじめとした多くの生物・社会システムを表現するのに適した、simplicial activity-driven ネットワークを用いての収束性能解析手法も提案する。

*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報科学専攻 修士論文

最後に両モデルを用いてシミュレーションを行い，両モデルの真の収束率との比較検討や収束率に寄与するパラメータの考察を行う．

キーワード

合意制御，複雑ネットワーク，マルチエージェントシステム

Convergence rate of average agreement problem in Activity-Driven network*

Junpei Tagawa

Abstract

Today, multi agent systems exist in various fields such as formation flights and sensor networks. One of the important control problems for multi agent systems is agreement problem. In the agreement problem, all agents aim to coincide with specific state variables through local interaction and analyze convergence values and convergence speed leading to coincidence. These agreement problems have been studied for static network models based on actual networks at a certain point of time and dynamic models given probabilities for adjacency relationships. However, in order to represent real networks such as transport networks and human relationships, it is important to use a dynamic network model in which the adjacency relationship between nodes changes as actual time changes. It is also important to use a network model in which the nodes themselves form adjacency relationships. Therefore, in this paper, we consider an agreement problem using a network model called activity - driven network, in which the adjacency relationship of each node changes with time. In particular, in this paper, convergence performance is examined by calculating the upper bound of the convergence rate of activity - driven network. Therefore, we show that it is difficult to calculate the convergence performance analysis of the activity-driven network using the conventional method and focus on the fact that the real network is sparse, and at most one node is adjacent. We propose a sparse activity-driven network. Along with that, we propose a method to prove regularity to the structure of sparse activity-driven network and to facilitate

*Master's Thesis, Department of Information Science, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology

convergence performance analysis.

We also propose a convergence performance analysis method using a simplicial activity-driven network, which is suitable for expressing many biological and social systems including coauthor relation.

Finally, we perform simulation using both models and compare with the true convergence rate of both models and consider parameters that contribute to the convergence rate.

Keywords:

agreement problem, temporal network, multi agent system

目次

図目次	vii
第 1 章 はじめに	1
第 2 章 グラフ理論と合意問題	3
2.1 グラフ理論	3
2.2 マルチエージェントシステム	5
2.3 合意理論	6
2.4 連続時間システムの合意制御	7
2.5 離散時間システムの合意制御	9
第 3 章 Activity-driven ネットワークの合意制御	10
3.1 Activity-driven ネットワークの構造	11
3.2 Activity-driven ネットワークの離散時間合意制御	12
3.3 Activity-driven ネットワークの連続時間合意制御	15
3.4 Activity-driven ネットワークの収束性能解析	17
第 4 章 疎な activity-driven ネットワーク	19
4.1 定式化	19
第 5 章 Simplicial activity-driven ネットワーク	25
5.1 Simplicial activity-driven ネットワークの構造	25
5.2 疎な Simplicial activity-driven ネットワークの構造	26
第 6 章 シミュレーション	29
6.1 Activity-driven ネットワークについて	29
6.2 Simplicial activity-driven ネットワークについて	33
第 7 章 おわりに	38
謝辞	39

図目次

1	合意の例. ここでは全ての頂点が青色に合意している.	6
2	Activity-driven ネットワーク ($n = 10, m = 2$). 赤丸と白丸はそれぞれ"active"な頂点とそうではない頂点を表す.	11
3	離散時間システムにおける平均合意の様子.	12
4	連続時間システムにおける平均合意の様子.	16
5	Simplicial activity-driven ネットワーク ($n = 10, m = 2$). 赤丸 active な頂点を, 白丸は active ではない頂点を表す.	25
6	頂点数 10 の activity-driven ネットワークの数値結果. Activity rate は $[0, 1/100]$ の一様分布で与える. $m = 4, \Delta t = 2, \varepsilon = 0.3$	29
7	頂点数 50 の activity-driven ネットワークの数値結果. Activity rate は $[0, 1/500]$ の一様分布で与える. $m = 15, \Delta t = 3, \varepsilon = 0.1$	30
8	減衰率とその上界 γ の差の絶対値: ϵ と m を変化させた場合.	31
9	減衰率とその上界 γ の差の絶対値: θ と m を変化させた場合.	32
10	辺の数 m を変化させた時の, Simplicial activity-driven ネットワークと Activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与える. $n = 10, \Delta t = 2, \varepsilon = 0.3$	33
11	辺の数 m を変化させた時の, Simplicial activity-driven ネットワークと Activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与える. $n = 50, \Delta t = 3, \varepsilon = 0.1$	34

12	辺の数の期待値を満たすように <i>activity rate</i> と辺の数 m を変化させた時の、疎な simplicial activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. <i>activity rate</i> は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え, <i>activity rate</i> の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ, 辺の数 m を $1 \sim 29$ まで変化させた. $n = 30, \Delta t = 2, \varepsilon = 0.3$	35
13	隣接頂点数の期待値を満たすように <i>activity rate</i> と辺の数 m を変化させた時の, simplicial activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. <i>activity rate</i> は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え, <i>activity rate</i> の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ, 辺の数 m を $1 \sim 29$ まで変化させた. $n = 30, \Delta t = 2, \varepsilon = 0.3$	36
14	任意の隣接頂点数と <i>activity rate</i> の総和の組み合わせに対する, 疎な simplicial activity-driven ネットワークの収束率の上界値. <i>activity rate</i> は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え, <i>activity rate</i> の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ, 辺の数 m を $1 \sim 29$ まで変化させた. $n = 30, \Delta t = 2, \varepsilon = 0.3$	37

第 1 章 はじめに

ネットワークでつながった複数のノードが情報伝達をしてそれらの状態を一致させるとき、ネットワークにおいて合意が達成されるという [1]. 合意が得られるような状態更新のためのプロトコルを設計し、収束速度や合意点を求める問題を、合意問題という。合意問題は分散協調制御 [2] やセンサーネットワーク [3] に応用をもつ。構造が時間変化しないネットワーク、すなわち静的なネットワークに対しての合意問題は活発に検討されてきた [5–7, 9].

しかし現実に見れる多くの複雑ネットワークは、その構造を時間経過に伴い変化させる [21, 22]. このように時間変化するネットワークはテンポラルネットワーク [8] と呼ばれる。数多くあるテンポラルネットワークのモデルの中でも、activity-driven ネットワーク [13] は比較的単純でありながら任意の次数分布を表現できることが知られている。この特徴から、activity-driven ネットワークの様々な性質が調べられてきた。例にはその構造的な性質 [13, 17], ランダムウォークの漸近的な性質 [18, 19], あるいは伝播現象の振る舞い [20] などがある。

本稿では activity-driven network における合意問題を考える。従来の静的なネットワークに対する手法 [9] により activity-driven ネットワークにおける平均合意ダイナミクスの収束率の上界が得られるが、その上界の計算は難しい。そこで本研究では、activity-driven ネットワークが各時刻において疎である状況に焦点をあてる。このような状況は現実のテンポラルネットワークの多くに見れる [23]. この状況のもとで、合意への収束率に対して容易に評価可能な上界を導出する。この上界は、文献 [10] で用いられているような行列指数関数の打ち切りを必要としないという理論的な利点をもつ。

本論文の構成を述べる。第 2 章では、本論文で扱うグラフ理論および合意制御について述べる。第 3 章では、本研究で用いる activity-driven ネットワークモデルの構造・性質を述べ、離散時間と連続時間のそれぞれに関して合意制御を検討し、収束性能に関する計算の困難さについて述べる。第 4 章では、計算の困難さという課題に対し、疎なネットワークモデルを提案し、収束性能を容易に求められる式を提案する。第 5 章では、activity-driven ネットワークと違い、「ある頂点に隣接する頂点同士も隣接する」性質を表す simplicial activity-driven ネットワークモデル

を用いて収束性能の解析を行う．第 6 章では，第 4 章および第 5 章で求められた式を確認するシミュレーションを行う．最後に，第 7 章で本論文をまとめる．

[記号] 本論文では，以下の記号を用いる． $\mathbb{R}$ を実数の集合， $\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合， $\mathbb{N}$ を自然数の集合（0 を含む）とする． I_n を次元が n の単位行列， $O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列とする．要素がすべて 1 の n 次元ベクトルと $n \times n$ の行列をそれぞれ $\mathbf{1}_n$, J_n と書く．行列 M の転置を $M^\top$ と書く． M が対称の場合， M の固有値を $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$ と書く．ベクトル x のユークリッドノルムを $\|x\|$ と書く．ある事象が起こる確率は $\mathbb{P}(\cdot)$ とする．積分可能な確率変数 X に対して， $\mathbb{E}[X]$ を X の期待値とする．

第 2 章 グラフ理論と合意問題

2.1 グラフ理論

以下では、代数的なグラフ理論について述べる。グラフとは、いくつかの頂点とそれらを結ぶ辺から構成される図形である。数学的には、グラフを構成する n 個の頂点の集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 、および、頂点と頂点を結ぶ辺の集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ を用い、 $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ と定義される。ただし、 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ はエッジの集合を表し、別個の順序づけされていない頂点の組から構成される。 G において、頂点 i と頂点 j が隣接しているとは、 $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ であることをいい、これは無向グラフを表す。エッジ i が隣接する頂点の集合を、頂点 i の隣接集合と呼び、次のように定義する。

$$\mathcal{N}_i := \{j \in \mathcal{V} : \{i, j\} \in \mathcal{E} \text{ かつ } i \neq j\} \quad (1)$$

そして、頂点間の隣接関係を表現するのが、隣接行列である。グラフ G の隣接行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は $\{0, 1\}$ -行列で定義され、要素は次のようになる。

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{i, j\} \in \mathcal{E} \text{ かつ } i \neq j \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (2)$$

無向グラフの場合、隣接行列は常に対称行列となる。また、次のようなグラフ G における各頂点の辺の数である次数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ を対角要素に持つ行列を、 G の次数行列という。

$$D := \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

隣接行列 $A = [a_{ij}]$ の要素を用いると、グラフの次数 d_i は

$$d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (4)$$

と表される。

次数行列 D と隣接行列 A を用いて定義される次の行列を $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を G のグラフラプラシアンという.

$$\begin{aligned}
 L &:= D - A \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{31} & \sum_{j=1}^n a_{3j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{(n-1)n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n(n-1)} & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

2.2 マルチエージェントシステム

多数の自律的に意思決定を行うことができる構成要素からなるシステムをマルチエージェントシステムという。近年のセンサやアクチュエータ技術の向上により、小型機器であっても無線通信や一定の計算を行えるものが比較的安価に手に入るようになった。その影響で、制御システムにおいてもネットワーク化が可能となり、大規模・複雑化した結果、そうしたシステムをどのように協調的に制御するべきかが新たな研究対象となってきた。そこでは、特定の制御タスクを実現したいときに、どのような相互作用、情報交換、あるいは分散制御アルゴリズムを実行すれば達成できるかが重要な課題となっている。本研究で考えるマルチエージェントシステムとは、各頂点のダイナミクスと頂点間の情報伝達に用いるネットワークから構成される。そして、頂点 $i \in \mathcal{V}$ のダイナミクスは、関数 $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して微分方程式

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)), \quad x_i(0) = x_{0i} \quad (6)$$

によって表されるものとする。ただし、時刻 $t \in \mathbb{R}_+$ に対して変数 $x_i(t) \in \mathbb{R}$ と $u_i(t) \in \mathbb{R}$ は頂点 i の状態と入力を表し、定数 $x_{0i} \in \mathbb{R}$ は初期状態を表す。この時、頂点 $i \in \mathcal{V}$ が取得できる情報は、自分自身の状態 $x_i(t)$ と隣接する頂点 $j \in \mathcal{N}_i$ の状態 $x_j(t)$ である。したがって、頂点 i の制御入力は、ある関数 $c_i : \mathbb{R}^{n_i+1} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$u_i(t) = c_i(x_i(t), x_{j_1}(t), x_{j_2}(t), \dots, x_{j_{n_i}}(t)) \quad (7)$$

の形をしている必要がある。ただし、 $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n_i}} \in \mathcal{V}$ は頂点 i が隣接しているすべての頂点の状態を表し、 $\{j_1, j_2, \dots, j_{n_i}\} = \mathcal{N}_i$ であるとする。式 (7) の形をした制御器を分散制御器と呼ぶ。

2.3 合意理論

マルチエージェントシステムが合意を達成するとは、頂点に適当な制御入力 $u_i(t)$ を加えたとき、任意の初期状態 $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ に対して全ての頂点の状態 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ が漸近的に一致することである。すなわち、任意の $i \in \mathcal{V}$ と $j \in \mathcal{V}$ について

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0 \quad (8)$$

が成り立つことである。さらに、ある定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し、任意の $i \in \mathcal{V}$ について

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \alpha \quad (9)$$

が成り立つとき、 α を合意値と呼ぶ。合意の概念を簡単に表現したものを図 1 に示す。合意とは、各頂点が最初に持っている情報 (初期状態 x_{0i}) から有益な情報 (合意値 α) を抽出することと捉えることができる。どのような種類を抽出するか、すなわち、どのような合意値を得るかによって、合意の種類が異なる。本論文では、平均合意を採用する。

- 平均合意：頂点 $i = 1, 2, \dots, n$ の持つ初期状態 x_{0i} の平均値を求める合意。合意値は次のように得られる。

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0i} \quad (10)$$

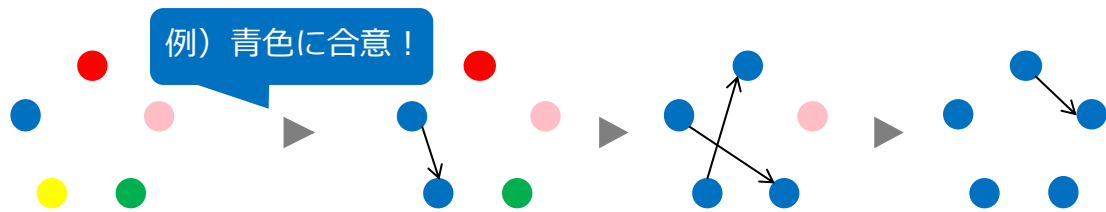


図 1 合意の例。ここでは全ての頂点が青色に合意している。

2.4 連続時間システムの合意制御

ここでは、すべての頂点のダイナミクスが積分系である場合、つまり、任意の $i \in \mathcal{V}$ に対して

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad x_i(0) = x_{0i} \quad (11)$$

である場合を考える。頂点 $i \in \mathcal{V}$ の入力 $u_i(t)$ を線形分散制御器

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i(t) - x_j(t)) \quad (12)$$

によって与えることとする。ただし、 $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{V}$ はグラフ G における頂点 i の隣接頂点の集合を表す。式 (12) は式 (7) の形をしており、分散制御器であることがわかる。この制御器は、頂点 i とそれに隣接する頂点 $j \in \mathcal{N}_i$ の状態の偏差 $(x_i(t) - x_j(t))$ を全てフィードバックする。これにより、任意の頂点間の状態の偏差が 0 に収束し、式 (8) の合意が達成されることが期待される。式 (11) と式 (12) をすべての頂点に対してまとめて表記することで、システム全体を表す微分方程式を求める。グラフ G の隣接行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、式 (12) は次式と等価である。

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \quad (13)$$

式 (13) を式 (11) の第 1 式に代入し、 $i = 1, 2, \dots, n$ について縦に並べると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \sum_{j=1}^n a_{1j} (x_1(t) - x_j(t)) \\ - \sum_{j=1}^n a_{2j} (x_2(t) - x_j(t)) \\ \vdots \\ - \sum_{j=1}^n a_{nj} (x_n(t) - x_j(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{(n-1)n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n(n-1)} & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_1(t) - x_j(t)) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_2(t) - x_j(t)) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(x_n(t) - x_j(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{(n-1)n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n(n-1)} & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。したがって、システム全体を表す微分方程式は

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

と表される。つまり、マルチエージェントシステムの特性は、グラフラプラシアンによって特徴付けられることが分かる。

2.5 離散時間システムの合意制御

ここでは、頂点 $i \in \mathcal{V}$ のダイナミクスが差分方程式

$$x_i[k+1] = f_i(x_i[k], u_i[k]), \quad x_i[0] = x_{0i} \quad (17)$$

によって既述されている離散時間のマルチエージェントシステムを考える。ただし、時刻 $k \in \mathbb{N}$ に対して、変数 $x_i[k] \in \mathbb{R}$ と $u_i[k] \in \mathbb{R}$ は頂点の状態と入力を表す。このとき、式 (7) と同様に、分散制御器は

$$u_i[k] = c_i(x_i[k], x_{j1}[k], x_{j2}[k], \dots, x_{jn}[k]) \quad (18)$$

と与えられる。離散時間のマルチエージェントシステムが合意を達成するとは、頂点に適当な制御入力 $u_i[k]$ を加えたとき、任意の初期状態 $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ に対してすべての頂点の状態 $x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]$ が漸近的に一致すること、すなわち任意の $i \in \mathcal{V}$ と $j \in \mathcal{V}$ について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i[k] - x_j[k]) = 0 \quad (19)$$

が成り立つことである。

ここで、すべての頂点のダイナミクスが離散時間の積分系、つまり、任意の $i \in \mathcal{V}$ に対して

$$x_i[k+1] = x_i[k] + u_i[k], \quad x_i[0] = x_{0i} \quad (20)$$

である場合を考える。また、連続時間のマルチエージェントシステムに対する線形分散制御器である式 (13) をもとに、頂点 $i \in \mathcal{V}$ の入力 $u_i[k]$ を

$$u_i[k] = -\varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i[k] - x_j[k]) \quad (21)$$

によって与えるものとする。ただし、 ε は、グラフ G の最大次数を Δ とした時に、 $\varepsilon < 1/\Delta$ を満たす適当な正数である。また、 $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{V}$ はグラフ G における頂点 $i \in \mathcal{V}$ の隣接集合を表す。式 (21) は式 (18) の形をしており、分散制御器であることが確認できる。式 (21) を式 (20) に代入し、 $i = 1, 2, \dots, n$ について縦に並べると、式 (16) の導出と同様にして、システム全体を表す差分方程式は

$$x[k+1] = (I - \varepsilon L)x[k], \quad x[0] = x_0 \quad (22)$$

と表される。

第 3 章 Activity-driven ネットワークの合意制御

Activity-driven ネットワーク [13] は、時間経過に伴い頂点間のつながり関係が変化するようなネットワークモデルである。つまり、activity-driven ネットワークは、テンポラルネットワークを表現したモデルである。人間関係や交通網など、我々に身近なネットワークの多くは、テンポラルネットワークであるので、合意問題を検討するにあたって、テンポラルネットワークモデルを対象とすることは重要である。加えて、activity-driven ネットワークと、従来のテンポラルネットワークモデルには大きな相違点がある。それが、ネットワークのつながりの形成方法の違いである。これまでのテンポラルネットワークモデルとして代表的なものに、Erdos-Renyi ネットワークモデルがある。Erdos-Renyi ネットワークモデルでは、各頂点間のつながりが現れる確率がパラメータとして与えられ、各時刻において、各頂点間のつながり関係が確率的に変化することで、テンポラルネットワークを表現している。しかし、このモデルのネットワーク形成のアルゴリズムには課題がある。それは、ネットワークの構成要素であるはずの頂点自身がつながりを形成する、というネットワーク形成の流れを表現できていないことである。人間関係に例えると、人間の意志に関係なく、確率的に知人関係が形成されているようなものである。この課題を克服するために、activity-driven ネットワークでは、各時刻において、各頂点がつながりを形成する確率をパラメータとしている。こうすることで、頂点自身がつながりを形成し、ネットワークを構築していく流れを表現でき、これまでのテンポラルネットワークモデルよりも現実的なモデルといえる。

3.1 Activity-driven ネットワークの構造

ここでは、activity-driven ネットワークの構造について記述する。Activity-driven ネットワークでは、頂点がつながりを形成する状態にある時、その頂点は"active"であるという。つまり、各時刻において、"active"な頂点がつながりを形成するのである。そこで、任意の $i = 1, \dots, n$ に対して、 a_i を 1 以下の正の定数とし、この a_i を頂点 i が"active"になる確率として *activity rate* と呼ぶ。また m を $n - 1$ 以下の自然数とする。以下に各時刻における activity-driven ネットワークの作成手順を示す。(例を図 2 に示す。)

- 1) 各時刻 $k \geq 0$ において、頂点 i は他の頂点とは独立に確率 a_i で"active"になる。
- 2) "Active"になった頂点は自らを除く $n - 1$ 個の頂点から一様分布に従って m 個の頂点を選択し、それぞれの頂点との間につながりを形成する。これらのつながりは時刻 $k + 1$ まで保持される。
- 3) 上記の手順を繰り返す。

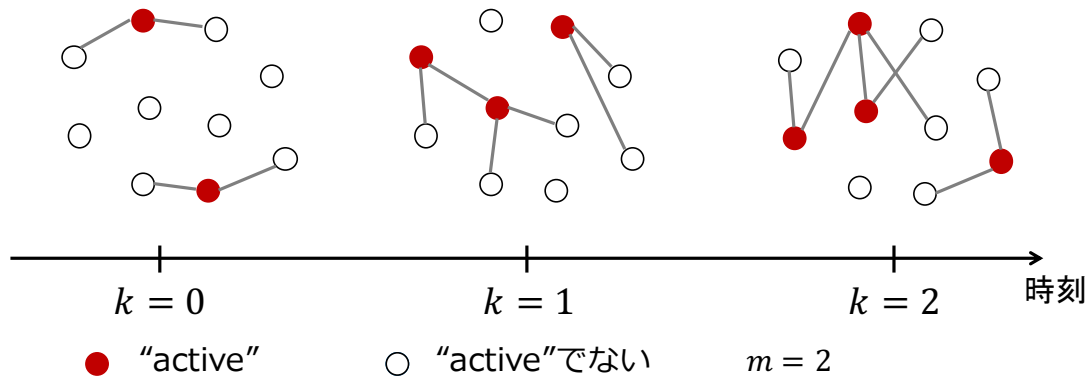


図 2 Activity-driven ネットワーク ($n = 10$, $m = 2$)。赤丸と白丸はそれぞれ"active"な頂点とそうではない頂点を表す。

以上の手順によって作られる独立同分布に従う無向グラフの列 $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ を activity-driven ネットワークと呼ぶ。

3.2 Activity-driven ネットワークの離散時間合意制御

ここでは, activity-driven ネットワークを用いた離散時間合意問題を検討する. Activity-driven ネットワークでは, 各時刻においてネットワーク構造が変化することを考慮すると, グラフラプラシアン L が各時刻で変化する. 時刻 $k \in \mathbb{N}$ のグラフラプラシアンを L_k とすると, 式 (22) をもとに, 離散時間の activity-driven ネットワークの合意制御は

$$x[k+1] = (I - \varepsilon L_k)x[k], \quad x[0] = x_0 \quad (23)$$

と表すことができる. 上記の離散時間システムでの平均合意の様子を以下の図 3 に示す.

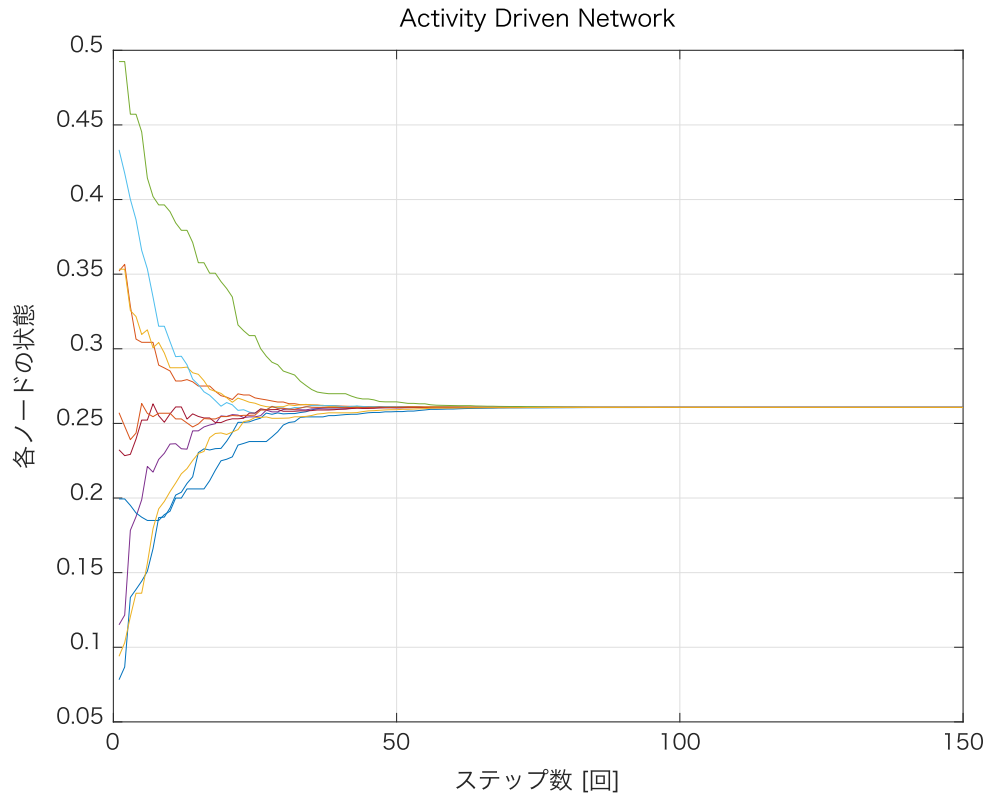


図 3 離散時間システムにおける平均合意の様子.

ここで, 頂点数は 10, 初期状態は $0 < x_{i0} < 0.5$ を満たすようにランダムに与え

たものである。グラフから、全ての頂点の状態が平均値へと収束している。

このとき、式 23 において、 $I - \varepsilon L_k = W_k$ とおくと、 W_k の期待値行列 $\mathbb{E}W_k$ は n 個の固有値を持ち、それらは、次式を満たすことが知られている。

$$0 \leq |\lambda_n(\mathbb{E}W_k)| \leq \cdots \leq |\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| \leq |\lambda_1(\mathbb{E}W_k)| = 1 \quad (24)$$

ここで、従来の離散時間合意制御に関して、以下の命題が成り立つことが知られている [4].

命題 1. 1. 離散時間システム $x[k+1] = W_k x[k]$ が合意を達成する。
 2. $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$.

そして、以下に、Activity-driven ネットワークの離散時間合意制御に関する定理を示す。

定理 1. *Activity-driven* ネットワークの離散時間合意制御において、命題 (1) は隣接行列と次数行列から計算可能である。 ■

証明 1. $|\lambda_2(\mathbb{E}W_k)| < 1$ を変形する。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_k &= \mathbb{E}[I - \varepsilon L_k] \\ &= \mathbb{E}[I] - \varepsilon \mathbb{E}[L_k] \\ &= I - \varepsilon \mathbb{E}[L_k] \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、式 (5) より、

$$\begin{aligned} I - \varepsilon \mathbb{E}[L_k] &= I - \varepsilon \mathbb{E}[D_k - A_k] \\ &= I - \varepsilon (\mathbb{E}[D_k] - \mathbb{E}[A_k]) \\ &= I - \varepsilon \mathbb{E}[D_k] + \varepsilon \mathbb{E}[A_k] \end{aligned} \quad (26)$$

と変形できる。ここから、 $\mathbb{E}[A_k]$ について記述する。*Activity-driven* ネットワークの時刻 k における隣接行列 A_k は、式 (2) のように表されるが、これは頂点 i が *active* になり頂点 j を選択した場合、もしくは、頂点 j が *active* になり頂点 i を選択した場合に限られる。したがって、 $\mathbb{E}[A_k]$ は、任意の $i = 1, \dots, n$ と $j = 1, \dots, n$ に関して頂点 i および頂点 j の *activity rate* である a_i, a_j を用いて次のように求め

られる.

$$\mathbb{E}[A_k]_{ij} = \begin{cases} a_i \times \frac{m}{n-1} + a_j \times \frac{m}{n-1} - (a_i \times \frac{m}{n-1}) \times (a_j \times \frac{m}{n-1}), & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (27)$$

次数行列の期待値行列 $\mathbb{E}[D_k]$ に関しても、式 (3) および式 (4) を用いることで、次のように求められる.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_k]_{ii} &= \sum_{j=1}^n \left\{ a_i \times \frac{m}{n-1} + a_j \times \frac{m}{n-1} - (a_i \times \frac{m}{n-1}) \times (a_j \times \frac{m}{n-1}) \right\} \\ \mathbb{E}[D_k]_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

■

3.3 Activity-driven ネットワークの連続時間合意制御

ここでは, activity-driven ネットワークを用いた離散時間合意問題を検討する. $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ を activity-driven ネットワークとする. 本来, activity-driven ネットワークは離散時間のテンポラルネットワークモデルなので, 連続時間のテンポラルネットワーク $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ を以下のように定める.

$$G(t) = G_k, \quad k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t \quad (29)$$

このとき, 各頂点の状態 $x_i(t) \in \mathbb{R}$ の更新則は, 式 (11) および式 (12) から

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} (x_j(t) - x_i(t)), \quad t \geq 0$$

と表される. ただし $\mathcal{N}_i(t)$ は時刻 t における頂点 i の隣接集合を表す. 状態ベクトルを $x(t) = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top$, ネットワーク $G(t)$ のグラフラプラシアンを $L(t)$ とすると,

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t)$$

が成り立つ.

また, 本研究では特に, 状態ベクトル $x(t)$ の周期 $\Delta t > 0$ によるサンプル

$$z_k = x(k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

を考える. これらのサンプルは任意の $k \geq 0$ に対して

$$z_{k+1} = e^{-\Delta t L_k} z_k$$

を満たす.

上記の連続時間システムでの平均合意の様子を以下の図 4 に示す.

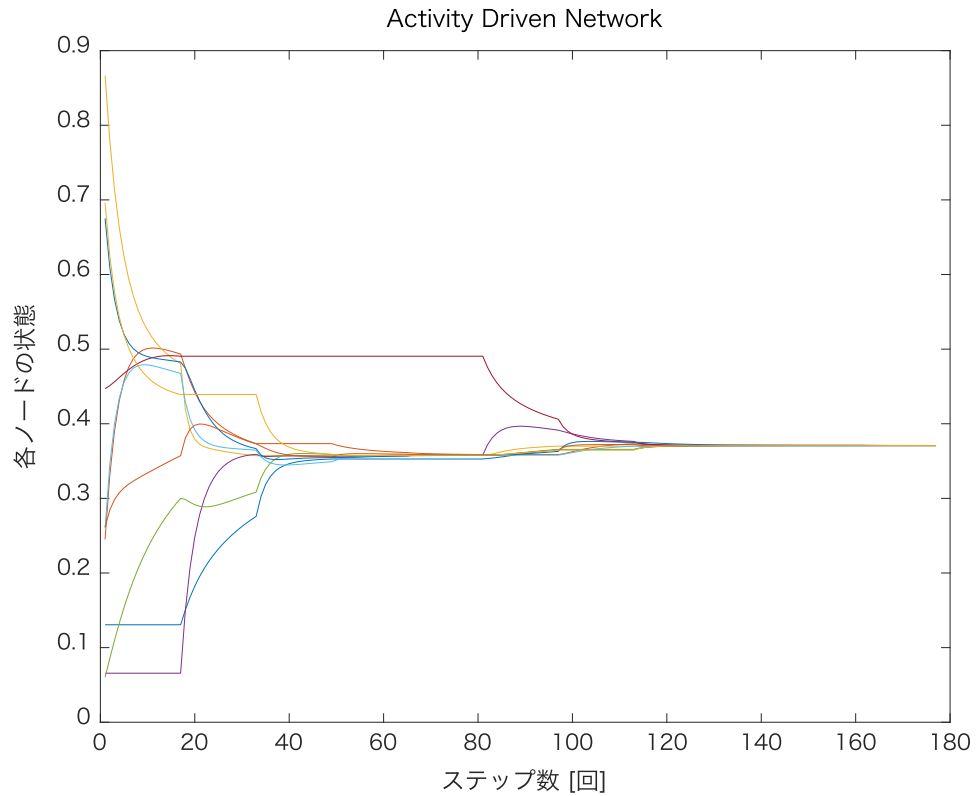


図 4 連続時間システムにおける平均合意の様子.

離散時間システムと同様, 頂点数は 10, 初期状態は $0 < x_{i0} < 1$ を満たすようにランダムに与えたものである. グラフから, 全ての頂点の状態が平均値へと収束しているのが分かる. また, "active" な頂点と接続しなかった頂点は, 状態が変化しない様子も現れている.

3.4 Activity-driven ネットワークの収束性能解析

ここでは、連続時間システムにおける収束性能について述べる。

いま $\mathcal{A}$ を、ベクトルによって貼られる $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。 Π を $\mathbb{R}^n$ から $\mathcal{A}$ の直交補空間への直交射影とする。すると、時刻 k で合意が達成されることと $\Pi z_k = 0$ は同値である。従って、ノルム $\|\Pi z_k\|$ は時刻 k において頂点がどの程度合意から離れているかの評価を与える。そこで、各時刻における合意の程度を定量化するために確率

$$p_K = \mathbb{P} \left(\sup_{k \geq K} \|\Pi z_k\|^2 \geq \epsilon \right)$$

を導入する [9, 10]。ここで $\epsilon > 0$ は正の定数である。次の命題はこの確率の上界を与える。

命題 2. 任意の $K \geq 0$, $\epsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$p_K \leq \epsilon^{-1} \|\Pi z_0\|^2 \lambda_{n-1} \left(\mathbb{E} [e^{-2\Delta t L_k}] \right)^K \quad (30)$$

が成り立つ。

式 (30) に現れる上界の計算はネットワークが大きい場合には困難である。このことを示すために、まず activity-driven ネットワークにて現れうるネットワークの実現の総数を求める。ある時刻において n_a 個の頂点が active であるとする。それぞれの active な頂点について、その隣接頂点の選び方は $\binom{n-1}{m}$ 通り存在するので、全ての active な頂点を総合すると $\binom{n-1}{m}^{n_a}$ 通りの隣接頂点の選び方が存在する。一方、 n 個の頂点の中から n_a 個が active になる場合は $\binom{n}{n_a}$ 通りある。したがって activity-driven ネットワークの実現の総数は

$$\begin{aligned} N_{n,m} &= \sum_{n_a=0}^n \binom{n}{n_a} \binom{n-1}{m}^{n_a} \\ &= \left[1 + \binom{n-1}{m} \right]^n \end{aligned}$$

により与えられ、これは頂点数 n に対して指数関数的に増加する。例えば $n = 10$ の場合、 $m = 9$ の場合を除いて $N_{n,m} \geq 10^{10}$ となる。したがって、式 (2) の右辺に現れる期待値 $E[e^{-2\Delta t L_k}]$ を計算するためには、 10^{10} 個を超えるラプラスアン行

列の指数関数を計算する必要がある，それは容易ではない．類似の問題に対して文献 [10] では，行列指数関数の級数展開の切り捨てによる手法が提案されている．しかしながら，その切り捨て誤差にの定量的な評価は与えられていない．

第4章 疎な activity-driven ネットワーク

本節では activity-driven ネットワークが疎である場合の平均合意ダイナミクスの漸近的挙動を検討する。合意への収束率を、容易に計算可能な行列の固有値を用いて上から評価できることを示す。

4.1 定式化

頂点の activity rate が十分小さい場合を考える。このとき、各時刻において高々一つの頂点が active になると近似的にみなすことが可能である。この観点から、activity-driven ネットワークを以下の手順により定まるテンポラルネットワークで近似することにする。

- 1') 各時刻 $k \geq 0$ において高々一つの頂点が active になる。頂点 i が active になる確率を a_i とする。どの頂点も active にならない確率は $1 - \sum_{i=1}^n a_i$ と等しい。
- 2') Active になった頂点は自分以外の $n - 1$ 個の頂点から一様分布に従って m 個の頂点を選択し、それぞれに対して1本のエッジを張る。これらのエッジは時刻 $k + 1$ まで保持される。
- 3') 上記の手順を繰り返す。

式 (6) と同様に、連続時間のテンポラルネットワーク $\{G'(t)\}_{t \geq 0}$ を

$$G'(t) = G'_k, \quad k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t$$

で定める。ネットワーク $G'(t)$ のラプラシアン行列を $L'(t)$ とする。前節と同様の平均合意ダイナミクス

$$\frac{dx'}{dt} = -L'(t)x'(t)$$

を考える。このとき、離散時間のサンプル $z'_k = x'(k\Delta t)$ は

$$z'_{k+1} = e^{-\Delta t L'_k} z'_k \quad (31)$$

を満たす。合意の程度を定量化するために、3 節と同様にして確率

$$p'_K = \mathbb{P} \left(\sup_{k \geq K} \|\Pi z'_k\|^2 \geq \varepsilon \right)$$

を任意の $K \geq 1$ に対して定める。ここで $\varepsilon > 0$ は定数である。すると、命題 2 と同様にして

$$p'_K \leq \varepsilon^{-1} \|\Pi z'_0\|^2 \lambda_{n-1} \left(\mathbb{E} \left[e^{-2\Delta t L'_k} \right] \right)^K \quad (32)$$

が成り立つことを示すことができる。

以下の定理は、元の activity-driven ネットワークの場合とは異なり、式 (2.3) の右辺の行列 $\mathbb{E}[e^{-2\Delta t L'_k}]$ を容易に計算できることを示す。

定理 2. それぞれの $i = 1, \dots, n$ に対して行列 $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を以下のようにして定義する：すべての $k = 1, \dots, n$ に対して

$$[M_i]_{kk} = \begin{cases} 1 - \frac{m(1 - e^{-(m+1)2\Delta t})}{m+1}, & k = i, \\ 1 - \frac{(m^2 - 1)e^{-2\Delta t} + e^{-(m+1)T} - m^2}{(m+1)(n-1)}, & k \neq i. \end{cases} \quad (33)$$

すべての $k = 1, \dots, n$ および $l = 1, \dots, n$ (ただし $k \neq l$) に対して

$$[M_i]_{kl} = \begin{cases} 1 - \frac{(m-1)(1 - e^{-(m+1)2\Delta t})}{(m+1)(n-2)(n-1)}, & k = i \text{ or } l = i, \\ 1 - \frac{m + e^{-(m+1)2\Delta t} - (m+1)e^{-2\Delta t}}{(m+1)(n-1)}, & k \neq i \text{ and } l \neq i. \end{cases} \quad (34)$$

このとき

$$\mathbb{E}[e^{-2\Delta t L'_k}] = \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) I_n + \sum_{i=1}^n a_i M_i \quad (35)$$

が成り立つ。 ■

証明 2. $T = 2\Delta t$ とする. 任意の $k \geq 0$ に対して, 以下のように事象を定義する:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i &= \{G'_k \text{ において頂点 } i \text{ が } \textit{active} \text{ である} \}, \\ \mathcal{B} &= \{G'_k \text{ においてどの頂点も } \textit{active} \text{ ではない} \}.\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{B}$ が起こる確率はそれぞれ a_i と $1 - \sum_{i=1}^n a_i$ である. 従って

$$\mathbb{E}[e^{-TL'_k}] = \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i\right) \mathbb{E}[e^{-TL'_k} \mid \mathcal{B}] + \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[e^{-TL'_k} \mid \mathcal{A}_i] \quad (36)$$

を得る. どの頂点も *active* にならない, すなわち $\mathcal{B}$ が起こる場合, グラフ G'_k はエッジを持たない. このときラプラシアン行列は $L'_k = O$ となるから

$$\mathbb{E}[e^{-TL'_k} \mid \mathcal{B}] = I \quad (37)$$

が成り立つ. 次に $\mathcal{A}_i$ が起こる, つまり頂点 i が *active* である場合を考える. 頂点 i は一様分布に従って m 個の頂点を選択する. そこで, $\mathcal{V} \setminus \{i\}$ の部分集合で m 個の要素からなるものの全体を $\mathfrak{N}_i$ とする. そして任意の $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i$ に対して, 頂点の集合 $\mathcal{V}$ とエッジの集合 $\mathcal{E}_{i,\mathcal{N}} = \{\{i, j\}\}_{j \in \mathcal{N}}$ を有するネットワークのラプラシアン行列を $L_{i,\mathcal{N}}$ とする. すると, m 個の頂点の選び方が $\binom{n-1}{m}$ 通りあることから,

$$\mathbb{E}[e^{-TL'_k} \mid \mathcal{A}_i] = \sum_{\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i} \frac{1}{\binom{n-1}{m}} e^{-TL_{i,\mathcal{N}}} \quad (38)$$

が成り立つことがわかる.

式 (38) の右辺に現れる行列指数関数を求める. $i = 1$ かつ $\mathcal{N} = \{2, 3, \dots, m+1\}$ の場合を考える. ここでは数学的帰納法を用いる. ラプラシアン行列は

$$L = \begin{bmatrix} m & -\mathbf{1}_m^\top & 0^\top \\ -\mathbf{1}_m & I_m & O \\ 0 & O & O \end{bmatrix}$$

により与えられる. 従って $k = 1$ のとき式 (20) は成り立つ. 次に $k = k_0$ の時に式 (20) が成り立つと仮定する., L^{k_0+1} を計算する. L^{k_0+1} を次のようにおく.

$$L^{k_0+1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

この時、仮定より、以下の計算式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
M_{11} &= m(m+1)^{k_0-1} \cdot m + (-(m+1)^{k_0-1} \mathbb{1}_m^\top)(-\mathbb{1}_m) \\
&= m^2(m+1)^{k_0-1} + m(m+1)^{k_0-1} \\
&= m(m+1)^{k_0}, \\
M_{12} &= m(m+1)^{k_0-1}(-\mathbb{1}_m^\top) + (-(m+1)^{k_0-1} \mathbb{1}_m^\top)I_m \\
&= -(m+1)^{k_0} \mathbb{1}_m, \\
M_{22} &= -(m+1)^{k-1} \mathbb{1}_m(-\mathbb{1}_m^\top) + \left(I_m + \frac{(m+1)^{k-1} - 1}{m} J_m \right) I_m \\
&= (m+1)^{k_0-1} J_m + I_m + \frac{(m+1)^{k_0-1} - 1}{m} J_m \\
&= I_m + \frac{(m+1)^{k_0} - 1}{m} J_m.
\end{aligned} \tag{39}$$

また, M_{13}, M_{23}, M_{33} は 0 となることは容易に計算できるので, つまり行列 L^{k_0+1} の対称性から, (20) は $k = k_0 + 1$ の時も成り立つことがわかる. つまり, すべての $k \geq 1$ に対して

$$(L_{1,\mathcal{N}})^k = \begin{bmatrix} m(m+1)^{k-1} & -(m+1)^{k-1} \mathbb{1}_m^\top & 0_{n-m-1}^\top \\ -(m+1)^{k-1} \mathbb{1}_m & I_m + \frac{(m+1)^{k-1} - 1}{m} J_m & O_{m,n-m-1} \\ 0_m & O_{m,n-m-1} & O_{n-m-1} \end{bmatrix} \tag{40}$$

が成り立つことを示すことができる. 式 (40) の右辺に現れる行列と同様に, 行列指数関数 $e^{-TL_{1,\mathcal{N}}}$ をブロック行列

$$e^{-TL_{1,\mathcal{N}}} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

として表す.

式 (40) は, $N_{13}, N_{23}, N_{31}, N_{32}$ が零行列であることを意味する. N_{33} は恒等行

列となることも分かる。また、行列指数関数の定義と式 (40) より次式が従う：

$$\begin{aligned}
N_{11} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m+1)^{k-1}(-T)^k}{k!} \\
&= 1 + \frac{m}{m+1} \left(e^{-(m+1)T} - 1 \right) \\
&= \frac{me^{-(m+1)T} + 1}{m+1}, \\
N_{12} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(m+1)^{k-1} \mathbb{1}^\top (-T)^k}{k!} \\
&= -\frac{1}{m+1} (e^{-(m+1)T} - 1) \mathbb{1}^\top, \\
N_{22} &= I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_m + \frac{(m+1)^{k-1}-1}{m} J_m}{k!} (-T)^k \\
&= I_m + (e^{-T} - 1) I_m + \frac{e^{-(m+1)T} - 1}{m(m+1)} J_m - \frac{e^{-T} - 1}{m} J_m.
\end{aligned} \tag{41}$$

以上より、行列

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{me^{-(m+1)T}+1}{m+1} & \frac{1-e^{-(m+1)T}}{m+1} \mathbb{1}_m^\top \\ \frac{1-e^{-(m+1)T}}{m+1} \mathbb{1}_m & e^{-T} I_m + \frac{m+e^{-(m+1)T}-(m+1)e^{-T}}{m(m+1)} J_m \end{bmatrix}$$

を用いて指数関数行列 $e^{-TL_{1,\mathcal{N}}}$ を

$$e^{-TL_{1,\mathcal{N}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D} & O_{m+1,n-m-1} \\ O_{n-m-1,m+1} & I_{n-m-1} \end{bmatrix}$$

と表すことができる。

以上の議論を任意の頂点 i と近傍 $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i$ へと一般化すると、指数関数行列 $e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}$ を以下のように求めることができる：すべての $k = 1, \dots, n$ について

$$[e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}]_{kk} = \begin{cases} 1 - \frac{m(1 - e^{-(m+1)T})}{m+1}, & k = i, \\ e^{-T} + \frac{m + e^{-(m+1)T} - (m+1)e^{-T}}{m(m+1)}, & k \in \mathcal{N}, \\ 1, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

すべての異なる (k, l) について

$$[e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}]_{k\ell} = \begin{cases} \frac{1 - e^{-(m+1)T}}{m+1}, & \{k, \ell\} \in \mathcal{E}_{i,\mathcal{N}}, \\ \frac{m + e^{-(m+1)T} - (m+1)e^{-T}}{m(m+1)}, & k \in \mathcal{N} \text{ and } \ell \in \mathcal{N}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

式 (38) と上記の結果から、 $\mathbb{E}[e^{-TL'_k} | \mathcal{A}_i] = M_i$ が成り立つ。これと式 (37), (38) より式 (35) が得られる。 ■

命題 4 により、平均合意ダイナミクス (8) の収束率の上界を効率的に求めることができる。すなわち、以下の定理から、式 (10) および式 (34) で与えられる行列 M_i を用いることで平均合意ダイナミクス (8) の収束率の上界を計算することができ、3 節で示した計算の困難さを克服することができる。

定理 3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、確率 p'_K は $K \rightarrow \infty$ の極限で 0 に収束する。その収束率は

$$\gamma = 1 - \sum_{i=1}^n a_i + \lambda_{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i M_i \right)$$

以下である。 ■

第 5 章 Simplicial activity-driven ネットワーク

5.1 Simplicial activity-driven ネットワークの構造

ここでは、activity-driven ネットワークが表現できないような状況について考える。例えば論文の執筆から生ずる共著者関係においては、著者全員の間に関係性が生じるとみなすのが自然である [14]。この短所を解決するために、Petri ら [12] は activity-driven ネットワークを拡張した **simplicial activity-driven ネットワーク** を提案した。Simplicial activity-driven ネットワークにおいては、activity-driven ネットワークの構成手順の第二ステップが以下のように変更される：

- 2S) Active になった頂点は自らを除く $n - 1$ 個の頂点から一様分布に従って m 個の頂点を選択する。Active になった頂点は、選ばれた $n - 1$ 個の頂点は完全グラフを構成する。この完全グラフは時刻 $k + 1$ まで保持される。

Fig. 5 に、activity-driven ネットワークと simplicial activity-driven ネットワークの違いを例示する。

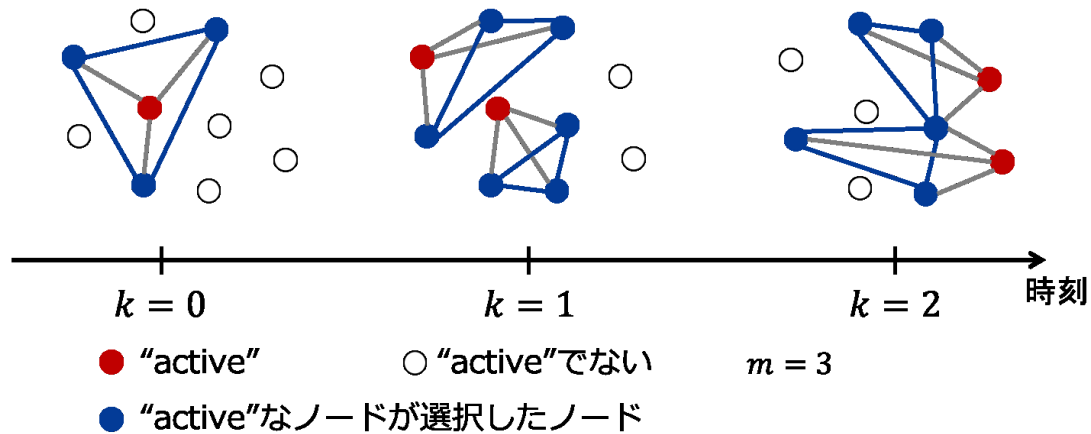


図 5 Simplicial activity-driven ネットワーク ($n = 10$, $m = 2$). 赤丸 active な頂点を、白丸は active ではない頂点を表す。

5.2 疎な Simplicial activity-driven ネットワークの構造

前章と同様に、疎な Simplicial activity-driven ネットワークに関して次の定理が成り立つ.

定理 4. それぞれの $i = 1, \dots, n$ に対して行列 $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を以下のようにして定義する：すべての $k = 1, \dots, n$ に対して

$$[M_i]_{kk} = \begin{cases} 1 - \frac{m(1 - e^{-(m+1)2\Delta t})}{m+1}, & k = i, \\ 1 + \frac{m^2(e^{-(m+1)2\Delta t} - 1)}{(m+1)(n-1)}, & k \neq i. \end{cases}$$

すべての $k = 1, \dots, n$ および $l = 1, \dots, n$ (ただし $k \neq l$) に対して

$$[M_i]_{kl} = \frac{m(1 - e^{-(m+1)2\Delta t})}{(m+1)(n-1)} \quad (42)$$

$$(43)$$

このとき

$$\mathbb{E}[e^{-2\Delta t L_k}] = \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i\right) I_n + \sum_{i=1}^n a_i M_i \quad (44)$$

が成り立つ. ■

証明に関しても、前章と同様に考えることができる.

証明 3. 任意の $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i$ に対して、頂点の集合 $\mathcal{V}$ と辺の集合 $\mathcal{E}_{i,\mathcal{N}} = \{\{i, j\}\}_{j \in \mathcal{N}}$ を有するネットワークのラプラシアン行列を $L_{i,\mathcal{N}}$ とする. すると、 m 個の頂点の選び方が $\binom{n-1}{m}$ 通りあることから、

$$\mathbb{E}[e^{-TL_k} | \mathcal{A}_i] = \sum_{\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i} \frac{1}{\binom{n-1}{m}} e^{-TL_{i,\mathcal{N}}} \quad (45)$$

が成り立つことがわかる.

式 (45) の右辺に現れる行列指数関数を求める. $i = 1$ かつ $\mathcal{N} = \{2, 3, \dots, m+1\}$

の場合を考える．数学的帰納法を用いると，すべての $k \geq 1$ に対して

$$(L_{1,\mathcal{N}})^k = \begin{bmatrix} m(m+1)^{k-1} & -(m+1)^{k-1}\mathbb{1}_m^\top & 0_{n-m-1}^\top \\ -(m+1)^{k-1}\mathbb{1}_m & I_m + \frac{(m+1)^{k-1}-1}{m}J_m & O_{m,n-m-1} \\ 0_m & O_{m,n-m-1} & O_{n-m-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

が成り立つことを示すことができる．式 (46) の右辺に現れる行列と同様に，行列指数関数 $e^{-TL_{1,\mathcal{N}}}$ をブロック行列

$$e^{-TL_{1,\mathcal{N}}} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

として表す．式 (46) は， N_{13} , N_{23} , N_{31} , N_{32} が零行列であることを意味する． N_{33} は恒等行列となることも分かる．また，行列指数関数の定義と式 (46) より次式が従う：

$$\begin{aligned} N_{11} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m+1)^{k-1}(-T)^k}{k!} = 1 + \frac{m}{m+1} (e^{-(m+1)T} - 1) \\ &= \frac{me^{-(m+1)T} + 1}{m+1}, \\ N_{12} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(m+1)^{k-1}\mathbb{1}_m^\top (-T)^k}{k!} \\ &= -\frac{1}{m+1} (e^{-(m+1)T} - 1)\mathbb{1}_m^\top, \\ N_{22} &= I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_m + \frac{(m+1)^{k-1}-1}{m}J_m}{k!} (-T)^k \\ &= I_m + (e^{-T} - 1)I_m + \frac{e^{-(m+1)T} - 1}{m(m+1)}J_m - \frac{e^{-T} - 1}{m}J_m. \end{aligned} \quad (47)$$

以上より，行列

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{me^{-(m+1)T}+1}{m+1} & \frac{1-e^{-(m+1)T}}{m+1}\mathbb{1}_m^\top \\ \frac{1-e^{-(m+1)T}}{m+1}\mathbb{1}_m & e^{-T}I_m + \frac{m+e^{-(m+1)T}-(m+1)e^{-T}}{m(m+1)}J_m \end{bmatrix}$$

を用いて指数関数行列 $e^{-TL_{1,\mathcal{N}}}$ を

$$e^{-TL_{1,\mathcal{N}}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D} & O_{m+1,n-m-1} \\ O_{n-m-1,m+1} & I_{n-m-1} \end{bmatrix}$$

と表すことができる.

以上の議論を任意の頂点 i と近傍 $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}_i$ へと一般化すると, 指数関数行列 $e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}$ を以下のように求めることができる: すべての $k = 1, \dots, n$ について

$$[e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}]_{kk} = \begin{cases} 1 - \frac{m(1 - e^{-(m+1)T})}{m+1}, & k = i, \\ e^{-T} + \frac{m + e^{-(m+1)T} - (m+1)e^{-T}}{m(m+1)}, & k \in \mathcal{N}, \\ 1, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad (48)$$

すべての異なる (k, l) について

$$[e^{-TL_{i,\mathcal{N}}}]_{k\ell} = \begin{cases} \frac{1 - e^{-(m+1)T}}{m+1}, & \{k, \ell\} \in \mathcal{E}_{i,\mathcal{N}}, \\ \frac{m + e^{-(m+1)T} - (m+1)e^{-T}}{m(m+1)}, & k \in \mathcal{N} \text{ and } \ell \in \mathcal{N}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (49)$$

式 (45), (48), (49) より, $\mathbb{E}[e^{-TL_k} | \mathcal{A}_i] = M_i$ が成り立つ. これと式 (36), (15) より式 (44) が得られた. ■

第 6 章 シミュレーション

6.1 Activity-driven ネットワークについて

本節では、これまでの節で得られた結果をシミュレーションを用いて確認する。各頂点の activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布からランダムにとる。また、 $m = 4$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$ とする。初期状態 x'_0 を適当に固定し、 10^4 個の標本 $\{z'_k\}_{0 \leq k < 100}$ を用いて近似的に確率 $\mathbb{P}(\sup_{k \geq K} \|\Pi z'_k\|^2 \geq \varepsilon)$ を計算する。得られた確率（赤線）と、定理 3 による減衰率の上界 γ （青線）を図 6 に示す。減衰率の上界 γ が確かに実際の減衰率を上から抑えているだけでなく、それらの差も小さいことが確認できる。次に、規模のより大きな activity-driven ネットワークを考える。頂点数を 50 とし、activity rate は区間 $[0, 1/500]$ の上での一様分布から得る。また、 $m = 15$, $\Delta t = 3$, $\varepsilon = 0.1$ とする。上述と同じ方法で近似的に確率 $\mathbb{P}(\sup_{k \geq K} \|\Pi z'_k\|^2 \geq \varepsilon)$ を計算する。その確率（赤線）と定理 3 による減衰率の上界 γ （青線）を図 7 に示す。

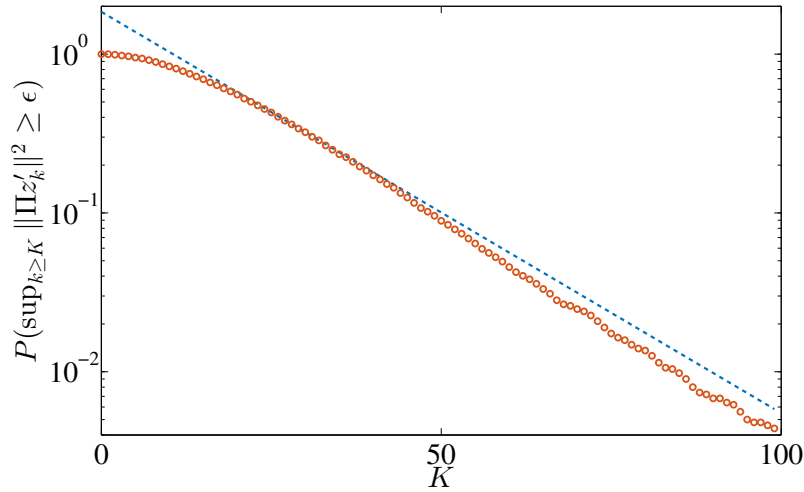


図 6 頂点数 10 の activity-driven ネットワークの数値結果。Activity rate は $[0, 1/100]$ の一様分布で与える。 $m = 4$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$ 。

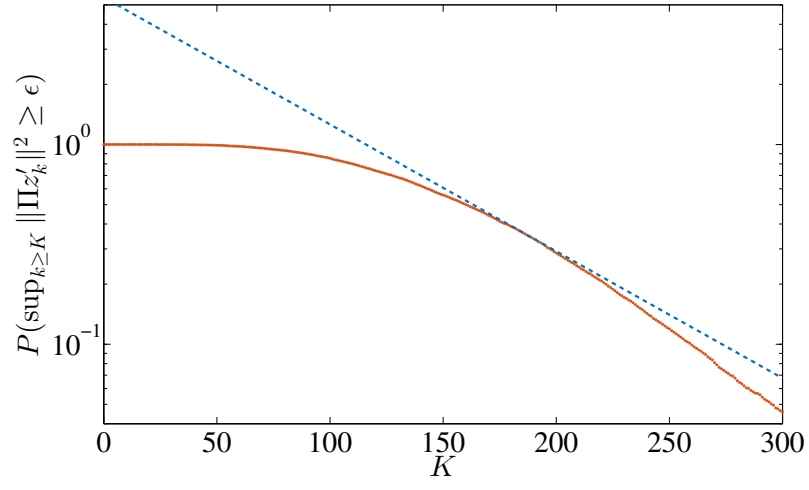


図 7 頂点数 50 の activity-driven ネットワークの数値結果. Activity rate は $[0, 1/500]$ の一様分布で与える. $m = 15$, $\Delta t = 3$, $\varepsilon = 0.1$.

次に、様々なパラメータに対して、本稿で示した収束率の上界と実際の減衰率の差を比較する。まず、 m を 1 から 10 まで 1 刻みで、また ε を 0.1 から 0.5 まで 0.05 刻みで変化させる。それぞれのパラメータの組 (m, ε) に対して減衰率とその上界 γ の誤差を計算する。得られた誤差を図 8 に示す。 ε が小さい場合は m によらず誤差が比較的小さい。一方 ε が大きい場合には、 m が増えるにつれて誤差も大きくなる傾向がみられる。

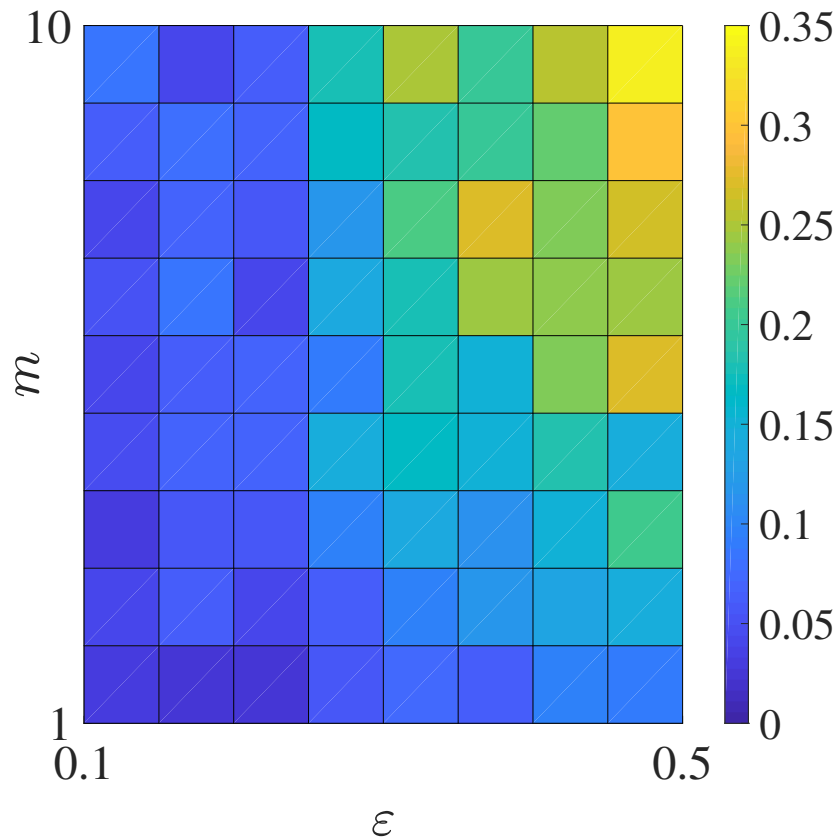


図 8 減衰率とその上界 γ の差の絶対値： ε と m を変化させた場合。

次に m と activity rate に対する変化をみる. m を 1 から 10 まで 1 刻みで変化させる. Activity rate は, 定数 $\theta \geq 0$ と ϕ に対して

$$a_i = \theta i + \phi, \quad i = 1, \dots, n$$

$\sum_{i=1}^n a_i = 1$, かつ $a_i \geq 0$ を満たすようにとる. これら制約を満たす activity rate が存在するようなパラメータ θ の範囲を $[0, \bar{\theta}]$ とする. そしてこのシミュレーションでは, θ を 0 から $\bar{\theta}$ まで変化させる. このときの減衰率と上界 γ の差を図 9 に示す. パラメータ θ の大小に関係なく, m が増えるに従い誤差が大きくなっていく傾向が見て取れる.

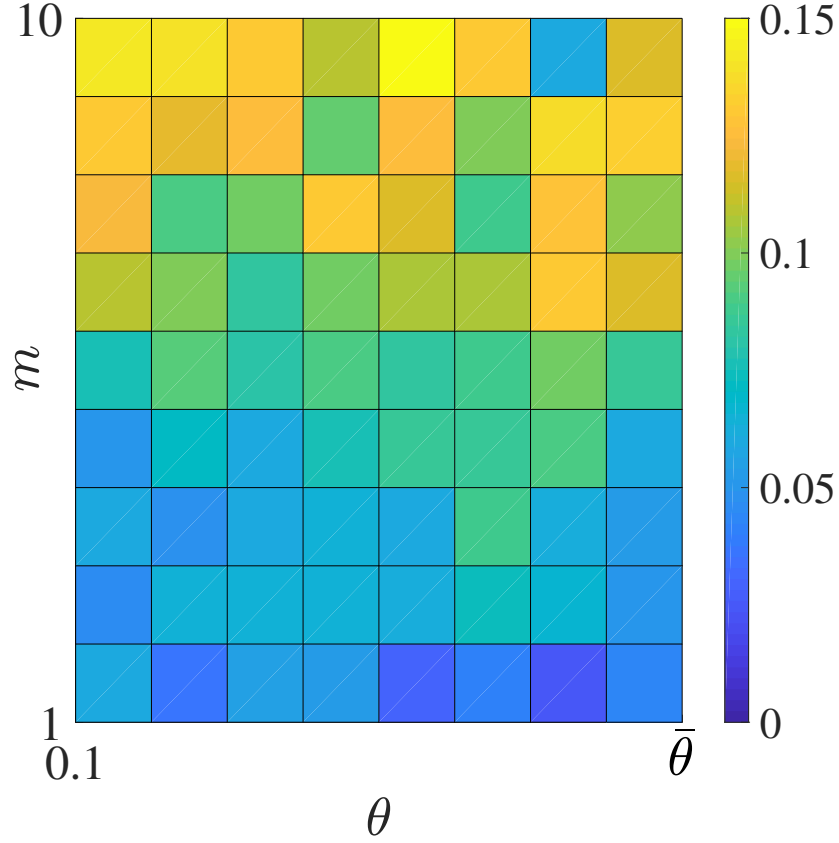


図 9 減衰率とその上界 γ の差の絶対値: θ と m を変化させた場合.

6.2 Simplicial activity-driven ネットワークについて

頂点数が $n = 10$ の場合を考える．各頂点の activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布からランダムにとる．また， $\Delta t = 2$ ， $\varepsilon = 0.3$ とする．初期状態 x_0 を適当に固定し， m を 1 から $n - 1$ まで 1 刻みで変化させ，収束率の上界を計算する．その結果を図 10 に示す．比較のため，activity-driven ネットワークにおける平均合意プロトコルの収束率の上界 [15, 16] も同時に示す．近傍の数 m を大きくしていくと，simplicial activity-driven ネットワークにおける上界値と activity-driven ネットワークにおける上界値の大小関係が逆転することが見てとれる．この傾向は，頂点数 $n = 50$ に対する結果（図 11）にも現れている

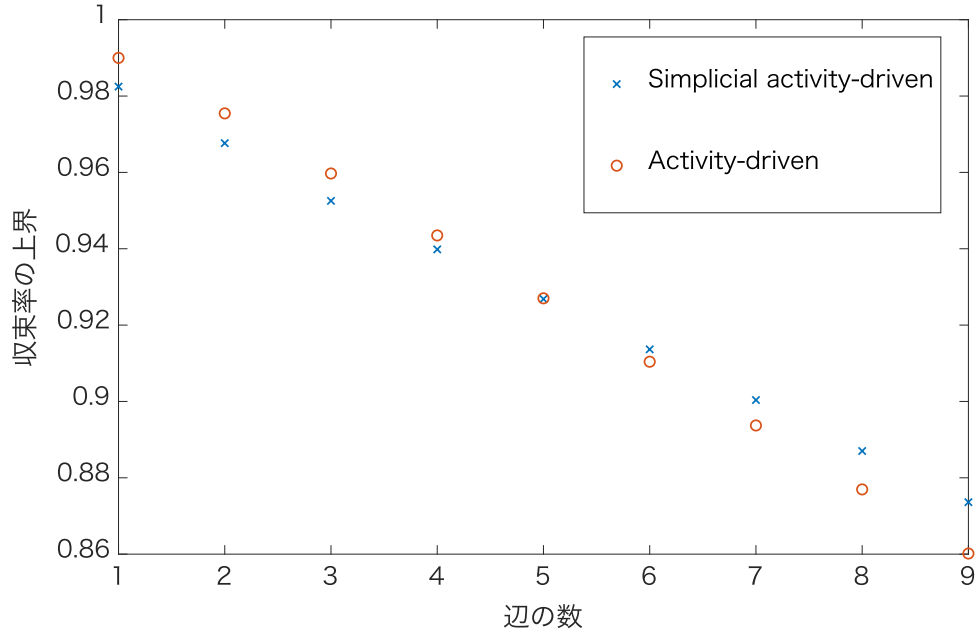


図 10 辺の数 m を変化した時の，Simplicial activity-driven ネットワークと Activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較．activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与える． $n = 10$ ， $\Delta t = 2$ ， $\varepsilon = 0.3$

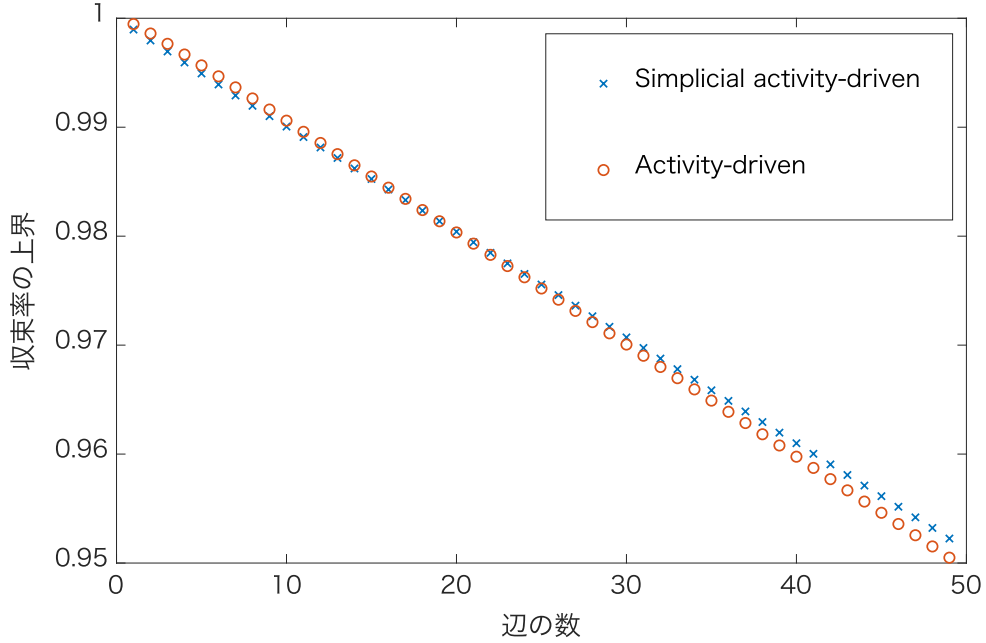


図 11 辺の数 m を変化させた時の, Simplicial activity-driven ネットワークと Activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. activity rate は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与える. $n = 50$, $\Delta t = 3$, $\varepsilon = 0.1$

次に, simplicial activity-driven ネットワークの収束率の上界が, 頂点を持つパラメータ変化にどれほど依存するかを考察したシミュレーションを示す. 頂点をもつパラメータは, *activity rate* と自らが形成する辺の数 m である. ここでネットワークの収束率の上階への依存度を考察するために, ネットワーク全体の辺の数の期待値と, 各頂点が隣接する頂点の数の期待値に着目する. 頂点数は $n = 30$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$ とする. 辺の数の期待値が等しくなるように, *activity rate* の総和と辺の数 m を変化させた場合の収束率の上界の変化を図 12 に示す. 結果から, 辺の数の期待値に関しては, *activity rate* よりも辺の数 m を変化させた方が, 収束率の上界の精度が上がっていることがわかる. これは, simplicial activity-driven ネットワークにおいて, 辺の数 m は $\frac{1}{2}m(m+1)$ となり, m^2 の項が辺の数の期待値に大きく影響を与えるためと考えられる.

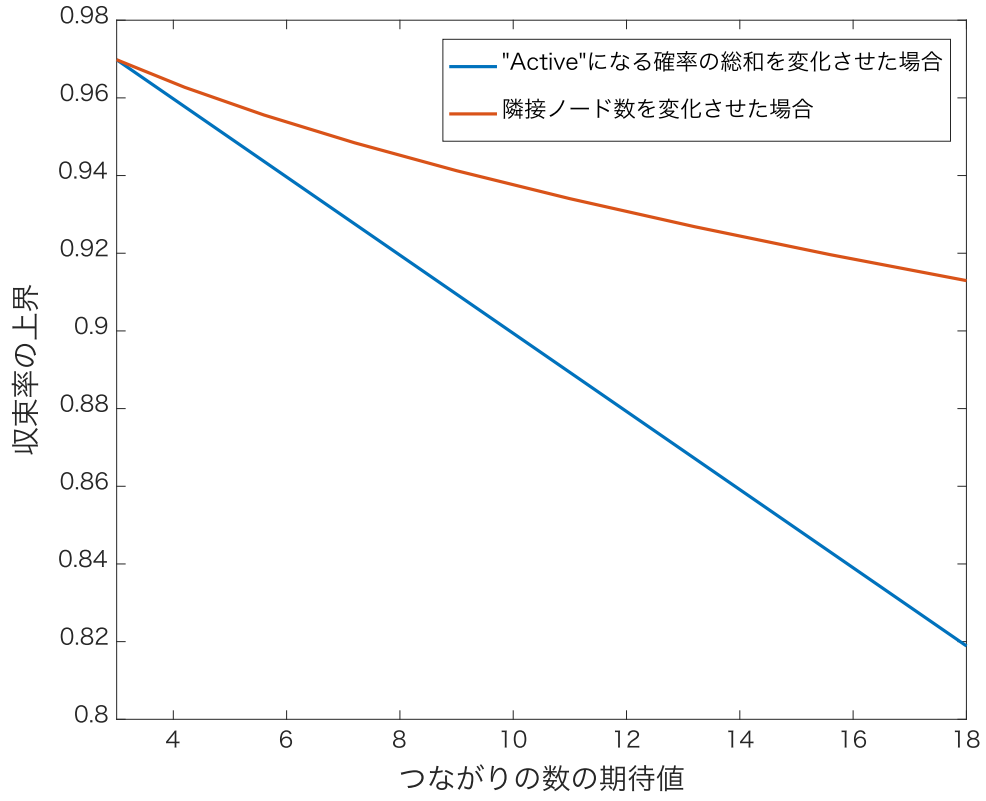


図 12 辺の数の期待値を満たすように *activity rate* と辺の数 m を変化させた時の、疎な simplicial activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. *activity rate* は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え, *activity rate* の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ, 辺の数 m を $1 \sim 29$ まで変化させた. $n = 30$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$

また、各頂点が隣接する頂点の数の期待値が等しくなるように、*activity rate* と辺の数 m を変化させた場合の収束率の上界の変化を図 13 に示す。結果から、辺の数の期待値に対する結果とは異なり、辺の数 m よりも *activity rate* を変化させた方が、収束率の上界の精度が上がっていることがわかる。

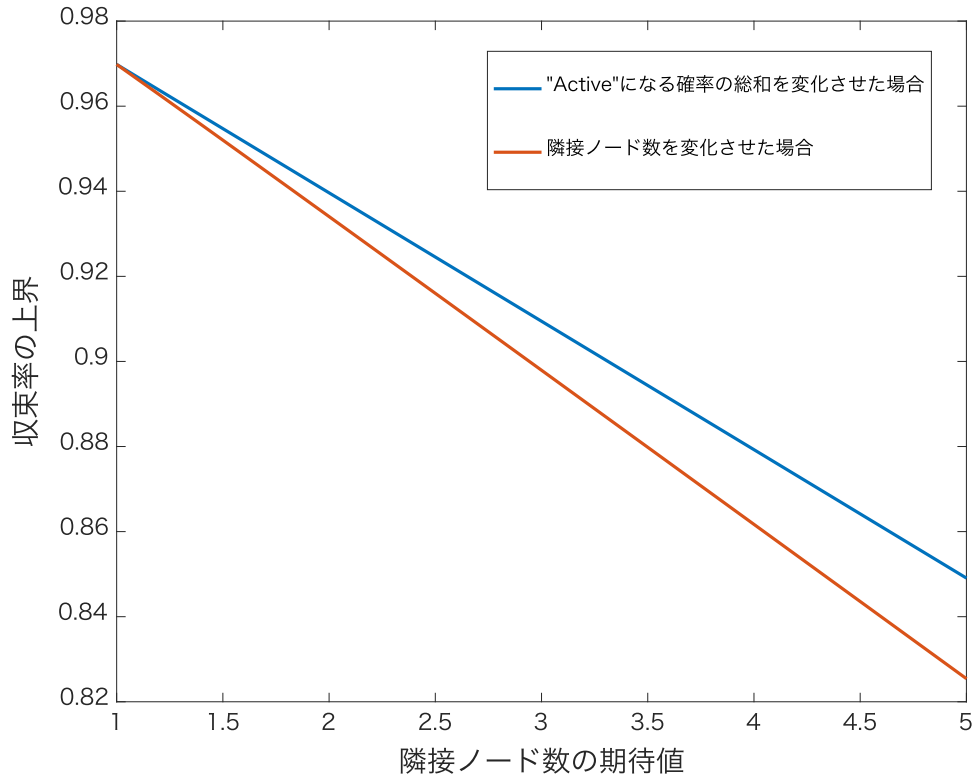


図 13 隣接頂点数の期待値を満たすように *activity rate* と辺の数 m を変化させた時の、simplicial activity-driven ネットワークにおける収束率の上界値の比較. *activity rate* は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え、*activity rate* の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ、辺の数 m を 1～29 まで変化させた. $n = 30$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$

最後に、任意の隣接頂点数と *activity rate* に対して、疎な simplicial activity-driven ネットワークの収束率の上界を求め、等高線で表したものを図 14 に示す。この図から、本論文で提案した計算法により、隣接頂点数や *activity rate* といったネットワーク構造の違いを、収束率の上界を用いて比較することが可能になることがわかる。

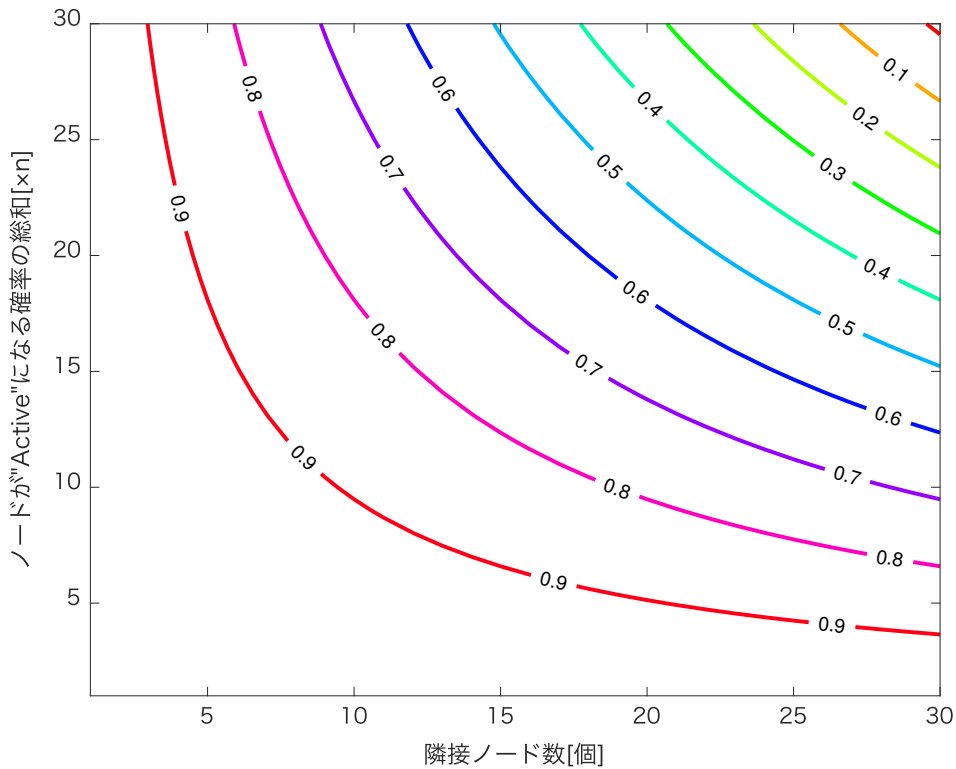


図 14 任意の隣接頂点数と *activity rate* の総和の組み合わせに対する、疎な simplicial activity-driven ネットワークの収束率の上界値. *activity rate* は区間 $[0, 1/100]$ の一様分布で与え、*activity rate* の総和を $\frac{1}{30} \sim 1$ まで変化させ、辺の数 m を 1~29 まで変化させた. $n = 30$, $\Delta t = 2$, $\varepsilon = 0.3$

第 7 章 おわりに

本論文では、時間経過に伴い隣接関係が変化し頂点自身が隣接関係を形成するモデルとして、activity-drive ネットワーク及び simplicial activity-driven ネットワークを用いてその収束性能を容易に計算する方法を提案した。

第 2 章では、本研究に必要なグラフ理論、マルチエージェントシステム、合意問題についての基本事項をまとめて述べた。

第 3 章では、activity-driven ネットワークの構造を説明し、activity-driven ネットワークの離散時間・連続時間での合意問題の定式化を行った。また、収束性能を解析するにあたり、activity-driven ネットワークの性質から計算が困難になることを示した。

第 4 章では、計算の困難さを克服するために、現実のネットワークが疎であることが多いことに着目し、疎な activity-driven ネットワークについての定式化を行った。また、疎な activity-driven ネットワークの構造の規則性から、グラフラプリアンの一般系を数学的帰納法を用いて導出・証明し、そこから収束性能を解析する容易な計算方法を提案した。

第 5 章では、生物・社会学システムの特徴を組み込んだモデルである simplicial activity-driven ネットワークを用いて、4 章と同様に疎な simplicial activity-driven ネットワークの収束性能を解析する容易な計算方法を提案した。

最後に第 6 章では、4 章および 5 章で求められた計算方法を用いて、真の収束率との比較や、収束性能に影響を与えるパラメータの探索などのシミュレーションを行った。

謝辞

本研究を進めるにあたり、主指導教員として様々な面でご指導とご助言をいただき、授業や輪講を通して制御工学の基礎を教えていただいた奈良先端科学技術大学院大学知能システム制御研究室の杉本謙二教授に心から御礼申し上げます。

定例研究会等で本研究に関して率直かつ的確なご意見を頂いた松原崇充特任准教授に深く御礼申し上げます。

小蔵正輝助教授には、本論文について直接のご指導をいただき、研究指針や論文の執筆、学会発表などに関して、親身になって話を聞いてくださり、常に的確なサポートをしていただきました。また、プライベートでも様々なお話しをしていただいて、充実した学生生活を送ることができました。深く御礼申し上げます。

研究に関して的確なご意見をいただくとともに、研究の合間の息抜きで雑談したりなど、研究生活をサポートしていただいた小林泰介助教授に心より感謝いたします。

出張手続きの際など、多くの事務手続きを迅速に代行して頂きました本研究室秘書の林英子様心より感謝いたします。

そして、2年間の大学院生活で、研究だけでなくプライベートでも様々な相談にのっていただき、時には優しく、時には厳しく面倒を見ていただいた先輩方、研究生活の辛いこと・楽しいことを共有して、切磋琢磨しあった研究室の同期、今後の活躍が期待される優秀な研究室の後輩に心より感謝いたします。

最後に、学生生活を最後まで支えてくれた家族や友人に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 215–233, 2007.
- [2] W. Ren and R. W. Beard, “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 655–661, 2005.
- [3] J. Cortés and F. Bullo, “Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 44, pp. 1543–1574, 2005.
- [4] A. Tahbaz-Salehi and A. Jadbabaie, “A necessary and sufficient condition for consensus over random networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, pp. 791–795, 2008.
- [5] L. Moreau, “Stability of multiagent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 169–182, 2005.
- [6] N. Abaid and M. Porfiri, “Consensus over numerosity-constrained random networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, pp. 649–654, 2011.
- [7] B. Touri and A. Nedic, “Product of random stochastic matrices,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, pp. 437–448, 2014.
- [8] N. Masuda and R. Lambiotte, *A Guide to Temporal Networks*. World Scientific Publishing, 2016.
- [9] Y. Hatano and M. Mesbahi, “Agreement over random networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 1867–1872, 2005.
- [10] M. T. Hale and M. Egerstedt, “Convergence rate estimates for consensus over random graphs,” in *2017 American Control Conference*. 2017, pp. 1024–1029.
- [11] I. Matei, J. S. Baras, and C. Somarakis, “Convergence results for the linear

- consensus problem under Markovian random graphs,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 51, pp. 1574–1591, 2013.
- [12] G. Petri and A. Barrat, “Simplicial activity driven model,” arXiv:1805.06740, 2018.
 - [13] N. Perra, B. Gonçalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Activity driven modeling of time varying networks,” *Scientific Reports*, vol. 2, 2012.
 - [14] A. Patania, G. Petri, and F. Vaccarino, “The shape of collaborations,” *EPJ Data Science*, 6:18, 2017.
 - [15] 多川, 小蔵, 増田, 杉本, “Activity Driven Network における平均合意の収束性能解析,” 第 5 回 計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, Su23-3, 2018.
 - [16] M. Ogura, J. Tagawa, and N. Masuda, “Distributed agreement on activity driven networks,” in *2018 American Control Conference*, 2018, pp. 4147–4152.
 - [17] M. Starnini and R. Pastor-Satorras, “Topological properties of a time-integrated activity-driven network,” *Physical Review E*, vol. 87, p. 062807, 2013.
 - [18] N. Perra, A. Baronchelli, D. Mocanu, B. Gonçalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Random walks and search in time-varying networks,” *Physical Review Letters*, vol. 109, p. 238701, 2012.
 - [19] B. Ribeiro, N. Perra, and A. Baronchelli, “Quantifying the effect of temporal resolution on time-varying networks,” *Scientific Reports*, vol. 3, p. 3006, 2013.
 - [20] L. Speidel, K. Klemm, V. M. Eguíluz, and N. Masuda, “Temporal interactions facilitate endemicity in the susceptible-infected-susceptible epidemic model,” *New Journal of Physics*, vol. 18, p. 073013, 2016.
 - [21] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah, “Randomized gossip algorithms,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 6, pp. 2508–2530, 2006.
 - [22] P. Holme, “Analyzing temporal networks in social media,” *Proceedings of*

- the IEEE*, vol. 102, no. 12, pp. 1–12, 2014.
- [23] P. Holme, “Modern temporal network theory: a colloquium,” *The European Physical Journal B*, vol. 88, no. 9, p. 234, 2015.