

修士論文

Geometric program を用いた
伝播プロセスのための最適資源配置手法

原田 潤一

2019 年 3 月 12 日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報科学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
修士（工学）授与の要件として提出した修士論文である。

原田 潤一

審査委員：

杉本 謙二 教授	(主指導教員)
笠原 正治 教授	(副指導教員)
松原 崇充 特任准教授	(副指導教員)
小蔵 正輝 助教	(副指導教員)

Geometric program を用いた 伝播プロセスのための最適資源配置手法*

原田 潤一

内容梗概

身の回りの多くのものにつながりが存在するため、つながりを介して広がって行く現象である伝播プロセスは、感染症やコンピュータウイルスなど多くの分野で見られる。その中でも、複雑ネットワークの重要なテーマの一つである、感染症対策のための資源配置問題を取り上げる。

Preciado らは、SIS モデルを用いた感染症対策の最適資源配置手法を提案した。Preciado らの大きな貢献は、geometric program と呼ばれる最適化問題のクラスを利用することで、最適資源配置問題が凸最適化問題に帰着することを示したことである。しかし、多くの考慮されていない要素も存在する。その中でも、本論文では三つの要素に焦点を当てて最適資源配置問題を考える。

一つ目は資源配置の切り替えである。資源配置の切り替えを可能とするために、線形切り替えシステムを利用し、時間毎の最適資源配置手法を提案する。二つ目は外乱の考慮である。外乱による影響の評価指標を設定し、外乱による影響を最小化する資源配置手法を提案する。三つ目はネットワークの不確かさである。ネットワーク構造の不確かさを許容するために、ランダムグラフを導入した最適資源配置手法を提案する。そして、それぞれの最適化問題が geometric program に帰着することを証明する。最後に、空港ネットワークを例題として、本手法の有効性を検証する。

キーワード

伝播プロセス, geometric programming, 線形切り替えシステム, ロバスト性, 不確かさ

*奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報科学専攻 修士論文, 2019 年 3 月 12 日.

Optimal Resource Allocation for containing epidemics by Geometric Program*

Junichi Harada

Abstract

Because there are connections to many things around us, spreading processes are found in many fields such as public health and computer viruses. In this thesis, I specifically focus on the problem of containing epidemic spreading processes, which is a major research field in network science.

Preciado et al. proposed methods for determining the optimal allocation using SIS model. The important contribution of this research is to show that this problem can convert to convex problem using geometric program. However, there are some elements which are not considered in this research.

The first is switching resource allocation. Then I propose the methods to give a time-series optimal resource allocation using switched systems. The second is consideration of disturbance. I formulate optimization problem to minimize effect of the disturbance. The third is uncertainties of the topology of the network. So as to overcome this limitation of information, I present a framework for optimal resource allocation problem with random graph. I finally show that each problem can be converted to geometric program. After that, I numerically confirm our theoretical results in the context of air transportation network.

Keywords:

Spreading processes, geometric programming, switched linear systems, robustness, uncertainly

*Master's Thesis, Department of Information Science, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, March 12, 2019.

目次

図目次		v
表目次		vi
第 1 章	緒論	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成と記法	4
1.2.1	構成	4
1.2.2	記法	4
第 2 章	準備	5
2.1	グラフ理論	5
2.2	SIS モデル	6
2.3	Geometric program	9
第 3 章	収束性のための最適資源配置	12
3.1	問題設定	12
3.2	収束性の最適化問題	13
3.3	凸最適化問題への帰着	14
第 4 章	ロバスト性のための最適資源配置	17
4.1	問題設定	17
4.2	ロバスト性の最適化問題	17
4.3	凸最適化問題への帰着	19
第 5 章	不確かなネットワークのための最適資源配置	23
5.1	問題設定	23
5.2	収束性確率の最適化問題	24
5.3	凸最適化問題への帰着	25
第 6 章	数値例と考察	29

6.1	拠点空港のネットワーク	29
6.2	収束性のための資源配置の最適化手法	30
	6.2.1 数値例	30
	6.2.2 考察	33
6.3	ロバスト性のための資源配置の最適化手法	36
	6.3.1 数値例	36
	6.3.2 考察	39
6.4	不確かなネットワークのための資源配置の最適化手法	40
	6.4.1 数値例	40
	6.4.2 考察	42
第 7 章	結論	44
	謝辞	45
	参考文献	46
	発表リスト	49

図目次

1.1	空手クラブのネットワーク	1
2.1	グラフ理論	5
2.2	SIS モデル	6
6.1	拠点空港のネットワーク	29
6.2	感染確率の総和の推移	30
6.3	空港ごとの資源配置 (次数中心性の降順)	31
6.4	空港ごとの資源配置 (ページランクの降順)	31
6.5	資源配置の推移	33
6.6	初期値がページランク上位 10 空港のときの空港ごとの資源配置 (次数中心性の降順)	34
6.7	初期値がページランク上位 10 空港のときの空港ごとの資源配置 (ページランクの降順)	34
6.8	初期値がページランク下位 10 空港のときの空港ごとの資源配置 (次数中心性の降順)	34
6.9	初期値がページランク下位 10 空港のときの空港ごとの資源配置 (ページランクの降順)	34
6.10	初期値がページランク上位 10 空港のときの資源配置の推移	35
6.11	初期値がページランク下位 10 空港のときの資源配置の推移	35
6.12	感染確率の総和の推移	36
6.13	空港ごとの資源配置 (次数中心性の降順)	37
6.14	空港ごとの資源配置 (ページランクの降順)	37
6.15	感染確率の総和の推移 (ページランク下位 10 空港)	39
6.16	感染確率の総和の推移	40
6.17	空港ごとの資源配置 (次数中心性の降順)	41
6.18	空港ごとの資源配置 (ページランクの降順)	41

表目次

6.1	各時刻の空港ごとの資源配置	32
6.2	空港ごとの資源配置	38
6.3	目的関数の誤差（次数中心性）	39
6.4	目的関数の誤差（ページランク）	39
6.5	固有値の最大実部の最適解との誤差（ページランク上位について 検索した場合）	42
6.6	固有値の最大実部の最適解との誤差（ページランク下位について 検索した場合）	42
6.7	空港ごとの資源配置	43

第 1 章 緒論

1.1 本研究の背景と目的

私たちの社会には，ネットワークが多く存在する．例えば，人間の交友関係や道路網，ウェブなどが代表的な例であり，多岐にわたる分野で見ることができる（図 1.1）．このようにネットワークが多く見られる理由は，要素間でつながりを持って，相互にやり取りすることに大きな意味があるからであろう．私たちの身近な存在である，意見形成やパケット輸送などが良い例である．しかし一方で，つながりがあることにより，ネットワークを介して感染症やコンピュータウイルスなどが広がる可能性もある．したがって，ネットワーク上の伝播プロセスに関する研究はネットワーク科学の重要なテーマの一つであり，さまざま対象に対して研究が行われてきた．例えば，感染症に関する研究 [1] やコンピュータウイルス [2]，サイバーフィジカルシステム [3] に関する研究が行われており，他分野との相互作用も多く見られる [4]．

その中でも，感染症対策のための最適資源配置手法を提案した，Preciado らの研究を取り上げる [5]．Preciado らは，伝播プロセスのモデルである SIS モデルを利用し，二つの最適化問題を設定した．一つ目は収束率を制約条件とし，所望の収束

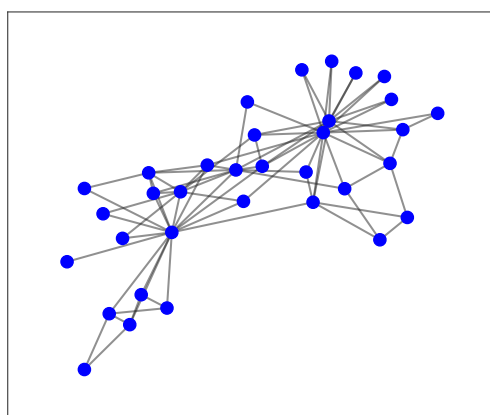


図 1.1 空手クラブのネットワーク

率を達成しながら，投入する資源を最小化する問題である．二つ目は投入する資源を制約条件とし，限られた資源の中で収束率を最大化する問題である．この研究の大きな貢献は，これらの最適化問題を geometric program に帰着することで，効率よく最適化を行えるようにしたことである．これにより，計算時間や解の最適性といった課題を解決することができる．

しかし，先行研究 [5] ではいくつか考慮されていない要素が存在する．一つ目が資源配置の切り替えである．先行研究 [5] では，資源配置は全時刻で一定である．それに対して，実際の感染症対策では，流行の規模などに応じて対策を転換していくことがある．例えば，2009年の新型インフルエンザの流行では，空港での検疫や医療体制といった対策を状況により転換することが行われた [6][7]．したがって，どの時刻にどの要素へ資源を配置すればよいかを得られる手法が必要である．

二つ目が外乱である．一般的な伝播プロセスの研究は，ある限定されたネットワーク内の伝播を扱っている．例えば，複雑ネットワークの研究で広く用いられている空手クラブのネットワークは，人間社会のネットワークの一部分を取り出したものである．つまり，現実のネットワークを扱う際には，省略された頂点や枝が存在し，これらの影響を考慮することができないのである．したがって，ネットワーク外からの影響を評価し，省略された頂点や枝による影響を考慮できる資源配置手法が必要である．

三つ目がネットワークの不確かさである．従来，複雑ネットワークにおける資源配置問題においては，ネットワークの接続構造が既知であると仮定されてきた [8][9]．しかし，現実問題を考えた際に，この仮定が満たされる例はあまり存在しない．例えば，人間社会のネットワークを考えたとき，人間社会が大規模かつ複雑であるため，網羅的に調査することは容易ではない．したがって，現実的に得られるネットワークは不確実性を持つことが考えられる．ゆえに，ネットワーク構造の不確かさを考慮した資源配置手法が必要である．

以上の議論を踏まえて，本論文では以下の三点に焦点を当てる：

- 時間ごとの資源配置の切り替えを可能とする資源配置手法．
- ネットワーク外からの影響を最小化するための資源配置手法．
- ネットワーク構造の不確かさを許容する資源配置手法．

一つ目の資源配置の切り替えを可能とするために、線形切り替えシステムを利用することを考える。切り替えシステムにおける最適制御問題は、先行研究として小蔵らの研究がある [10]。小蔵らは、非負の線形切り替えシステムの最適制御フレームワークを提案した。このフレームワークでは、先行研究 [5] と同様に、収束性に関する最適化とコストに関する最適化の二つの問題に対して、geometric program に帰着した最適化手法を提案した。ただし、この手法では、切り替えシステムはマルコフ過程に従って切り替わることを仮定している。したがって、マルコフ過程に従って切り替わるという仮定を置かない最適化手法の提案を行う。

二つ目のネットワーク外からの影響を評価するために、外乱を考慮したモデルを導入する。外乱を考慮した SIS モデルの先行研究の一つに、Piet らの研究がある [11]。Piet らは、古典的な SIS モデルの一般化モデルである、 ϵ -SIS モデルについて考察を行った。この ϵ -SIS モデルの特徴は、自己感染率 ϵ を考えているところである。しかし、現象の解析にとどまっており、ロバスト最適化は取り組まれていない。そこで、外乱による影響を最小化するロバスト最適化手法を提案する。

三つ目のネットワーク構造の不確かさについては、先駆的な研究の一つとして Holme らの研究がある [12]。従来の資源配置問題とは異なり、Holme らはネットワーク構造を知るためのコストが必要であると仮定している。そして、従来の資源配置問題に加え、ネットワーク構造の情報を収集するためのコストが存在する状況で、資源配置戦略の比較、検討がされている。そこで、コスト制約によって、ネットワーク構造の情報に不確実性が存在する場合での資源配置問題を考える。そのために、ネットワーク構造に確率を導入することで、不確かさを許容する最適資源配置手法を提案する。

本論文の大きな特徴は、それぞれの最適化問題が凸最適化問題に帰着できることを示したことである。一般に、最適化問題では得られた解の最適性や計算時間の問題が生じる。しかし、凸最適化問題に帰着することで、解が大域的な最適解になることが証明されるとともに、高速に最適化を行うことができる。特に、本論文が対象とするような現実のネットワークは規模が大きくなるため、このことは大きな価値を持つ。

1.2 本論文の構成と記法

1.2.1 構成

まず，第二章では準備として，グラフ理論と SIS モデル，geometric program を導入する．次に，第三章では線形切り替えシステムを利用した，資源配置の切り替えが可能な最適資源配置手法について述べる．第四章では外乱を考慮した伝播モデルを提案し，外乱による影響を最小化する最適資源配置手法について述べる．第五章ではランダムグラフを利用した，ネットワークの不確かさを考慮した最適資源配置手法について述べる．そして，第六章では空港ネットワークを利用して，本手法の有効性を検証し，考察を行う．最後に，第七章で本論文をまとめる．

1.2.2 記法

自然数と実数の集合をそれぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ と書く．また，非負の実数の集合を $\mathbb{R}_+$ と書き，非負の n 次元ベクトルの集合を $\mathbb{R}_+^n$ と書く．ベクトル x に対しての不等号は，各成分に対する不等号を意味しているとする．つまり， $x > 0$ とはすべての添字 i に関して $x_i > 0$ であることを示す．他の不等号 ($<, \geq, \leq$) についても同様とする．

第2章 準備

本章では，グラフ理論を導入し，伝播モデルとして SIS モデルを説明する．また，最適化問題のクラスである geometric program を紹介し，これが凸最適化問題に帰着できることを述べる．

2.1 グラフ理論

重み付き有向グラフ $\mathcal{G}$ は，以下の三つの要素から決定される（図 2.1）：

$\mathcal{V}$ グラフ $\mathcal{G}$ を構成する n 個の頂点 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

ε 頂点 $\mathcal{V}$ をつなぐ有向の枝 $\varepsilon \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

$\mathcal{W}$ 枝 ε の非負の重みを決定する関数 $\mathcal{W} : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}_+$.

これらをまとめて， $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon, \mathcal{W})$ と表現する．また，頂点 v_j から頂点 v_i へ向かう枝を (v_j, v_i) と表現する．そして，頂点 v_i へと向かう枝の集合を

$$\mathcal{N}_i^{\text{in}} = \{j : (v_j, v_i) \in \varepsilon\} \quad (2.1.1)$$

とする．

重み付き有向グラフ $\mathcal{G}$ の隣接行列を $A_{\mathcal{G}} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする．成分 a_{ij} は，頂点 v_j から頂点 v_i へと向かう枝が存在する場合，つまり $(v_j, v_i) \in \varepsilon$ のとき，枝の重

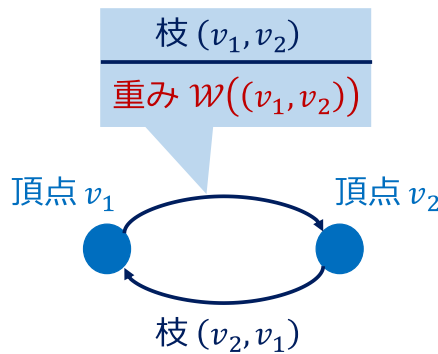


図 2.1 グラフ理論

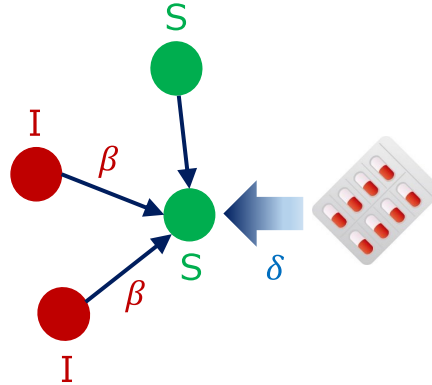


図 2.2 SIS モデル

み $W((v_j, v_i))$ と等しい. そして, 頂点 v_j から頂点 v_i へと向かう枝が存在しない場合, つまり $(v_j, v_i) \notin \varepsilon$ のとき, 0 である.

また, 枝の向きを考慮しない, つまり頂点 v_i から頂点 v_j へ向かう枝と頂点 v_j から頂点 v_i へ向かう枝の重みが等しいグラフを重み付き無向グラフと呼ぶ. 重み付き無向グラフは, 隣接行列が対称行列になるという特徴を持つ.

2.2 SIS モデル

感染症やコンピュータウイルスに代表される, ネットワーク上を伝播していく現象のモデルとして, パーコレーションや SIS モデル, SIR モデルなどが存在する. パーコレーションは時間の概念が入っていない静的なモデルで, SIS モデルや SIR モデルは動的に伝播していくモデルである [4]. しかし, 感染症は時間の経過とともに伝播していくため, 時間軸での伝播の様子が重要となる. したがって, 本研究では動的な伝播モデルの一つである SIS モデルを利用する.

SIS (Susceptible-infected-susceptible) モデルは感染症が動的に伝播していくモデルの一つであり, Weiss らによって提案された [13]. その後, Wang らによって離散時間への拡張が行われた [14]. このモデルでは, 各頂点は各時刻で感受性者 (S) と感染者 (I) のいずれかの状態を取る. 感受性者は感染者と隣接すると感染する可能性がある. 一方で, 感染者はいつか治癒する (図 2.2). このモデルでは, イ

ンフルエンザのように一度感染すると免疫を獲得する状況は考慮されていない．一度感染して治癒した場合も再び感染する状況を考えており，このような病気の例としては淋病，クラミジア，マラリア，眠り病などがある [4]．

ここでは，離散時間の SIS モデルでの伝播の様子を計算していく．頂点 $v_i \in \mathcal{V}$ の時刻 $k \geq 0$ における状態を $X_i[k] \in \{0, 1\}$ とする．ここで， $X_i[k] = 0$ は頂点 v_i が感染していない状態を， $X_i[k] = 1$ は頂点 v_i が感染した状態を表している．また， $X[k] = [X_1[k], \dots, X_n[k]]^\top \in \mathbb{R}^n$ とする．まず，頂点 v_i が時刻 k で感染していない状態 ($X_i[k] = 0$) を考える．この頂点が感染した頂点と隣接し，1 ステップ後に病気に感染する確率 $Pr(X_i[t + \Delta 1] = 1 | X_i[k] = 0)$ は以下のように表現できる：

$$Pr(X_i[k + 1] = 1 | X_i[k] = 0) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{in}} a_{ij} \beta_i X_j[k]. \quad (2.2.1)$$

ここで，感染率 $\beta_i > 0$ は頂点 v_i が感染する確率， $a_{ij} > 0$ は頂点 v_i と頂点 v_j の枝の重み $\mathcal{W}((v_j, v_i))$ を表している．次に，頂点 v_i が時刻 k で感染した状態 ($X_i[k] = 1$) を考える．この頂点が1 ステップ後も病気が治癒せず，感染したままの状態になる確率 $Pr(X_i[k + 1] = 1 | X_i[k] = 1)$ は以下のように表現できる：

$$Pr(X_i[k + 1] = 1 | X_i[k] = 1) = 1 - \delta_i. \quad (2.2.2)$$

ここで，治癒率 $\delta_i > 0$ は頂点 v_i が治癒する確率を表している．一般に，このモデルはネットワークの大きさが大きくなると解析が難しくなる．これは，SIS モデルが 2^n 個の状態を持つマルコフ過程であるため，計算時間が頂点の数に対して指数的に増加するからである [15]．したがって，計算が容易な上界を導出する．

頂点 v_i が時刻 k で感染している確率を

$$p_i[k] = Pr(X_i[k] = 1) = E(X_i[k]) \quad (2.2.3)$$

とおくと，すべての添字 i について

$$p_i[k] \geq 0 \quad (2.2.4)$$

が成り立つ．ここで，時刻 $k + 1$ で病気に感染している確率 $p_i[k + 1]$ は，

$$\begin{aligned} p_i[k + 1] &= Pr(X_i[k + 1] = 1) \\ &= Pr(X_i[k + 1] = 1 | X_i[k] = 0) Pr(X_i[k] = 0) \\ &\quad + Pr(X_i[k + 1] = 1 | X_i[k] = 1) Pr(X_i[k] = 1) \end{aligned}$$

により計算できるが、なおも評価を行うのが難しい。したがって、確率性やネットワークを無視した平均場近似を利用する [16] と、式 (2.2.1) と式 (2.2.2) より、

$$p_i[k+1] = (1 - p_i[k]) \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\text{in}}} a_{ij} \beta_i p_j[k] + p_i[k](1 - \delta_i) \quad (2.2.5)$$

が得られる。また、

$$p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.2.6)$$

とおき、さらに I は単位行列であるとする、

$$p[k+1] = (BA_{\mathcal{G}} - D + I)p[k] - P[k]BA_{\mathcal{G}}p[k] \quad (2.2.7)$$

が得られる。ただし、式 (2.2.7) の右辺は P について非線形であるため、線形の式に帰着することを考える [17]。今、 $P(t) \geq 0$, $B \geq 0$, $A_{\mathcal{G}} \geq 0$, $p(t) \geq 0$ なので、任意の時刻 k において、

$$p[k+1] \leq (BA_{\mathcal{G}} - D + I)p[k] \quad (2.2.8)$$

が成り立つ。この不等式より、以下の補題が成り立つ：

補題 1 ベクトル列 $\{q[k]\}_{k=0}^{\infty}$ を離散時間時不変システム

$$q[k+1] = (BA_{\mathcal{G}} - D + I)q[k], \quad q[0] = p[0] \quad (2.2.9)$$

の解とする。このとき、任意の頂点 v_i と時刻 k に対して

$$p_i[k] \leq q_i[k]$$

が成り立つ。

この標準的な補題を用いることにより、SIS モデルを線形システムに帰着することができるため、ネットワークが大規模になっても計算が容易である。したがって、式 (2.2.9) を、平均場近似を利用した SIS モデルの低次元モデルと考えることができる [18]。

2.3 Geometric program

Geometric program (GP) は、目的関数と制約条件が特殊な形で表現される最適化問題の一つのクラスである [19]。GP は凸最適化問題に帰着することができ、最適化問題を効率良く解くことができる。まず、GP の特徴である monomial と posynomial の概念を説明する。 $x_1, \dots, x_n$ を n 個の非負の変数とし、 x_i を成分に持つベクトル $x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、関数 g が以下の形で表現されるとき、関数 g を monomial と呼ぶ：

$$g(x) = cx_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}. \quad (2.3.1)$$

ここで、 $c > 0$ 、すべての添字 i について $a_i \in \mathbb{R}$ とする。そして、monomial な関数の有限個の和を posynomial と呼ぶ。すなわち、関数 f が以下の形で表現されるとき、関数 f を posynomial と呼ぶ：

$$f(x) = \sum_{k=1}^K c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}}. \quad (2.3.2)$$

Monomial と同様に、すべての添字 k について $c_k > 0$ である。Monomial な関数の例としては、以下のような関数が挙げられる：

$$5x, \quad 0.82, \quad 3x_3 \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \quad 4x_1^3 x_2^{-2} x_3.$$

これらの関数は monomial でありながら、posynomial でもある。また、posynomial な関数の例としては、以下のような関数が挙げられる：

$$0.3 + \frac{x_1}{x_2}, \quad 7(1 + x_1 x_2)^2, \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3.$$

ただし、これらの関数は posynomial であるが、monomial ではない。

これらを踏まえて、GP を導入する． f_i を posynomial な関数， g_i を monomial な関数とすると，GP は以下の形で表現される最適化問題の一つのクラスである：

$$\underset{x}{\text{minimize}} \quad f_0(x) \quad (2.3.3a)$$

$$\text{subject to} \quad f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3.3b)$$

$$g_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.3.3c)$$

$$x > 0. \quad (2.3.3d)$$

次に，GP が凸最適化問題に帰着できることを簡単に説明していく．まず，凸最適化問題は以下の形で表現される最適化問題である [20]：

$$\underset{z}{\text{minimize}} \quad h_0(z)$$

$$\text{subject to} \quad h_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3.4)$$

$$k_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

ここで，関数 h_i は凸関数，関数 k_i は変数 z についてのアフィン関数（線形関数）である．凸最適化問題には大きく二つの特徴がある：

1. 局所的最適解と大域的最適解が等しい.
2. 最適化の計算が高速.

この二つの特徴により，凸最適化問題は最適化を高速に実行できるとともに，得られた最適解の最適性を保証することができる．この凸最適化問題に最適化問題 (2.3.3) を帰着させるために，対数を利用する．制約条件 (2.3.3d) より，変数 x_i はすべての添字 i について $x_i > 0$ であるため，対数を取ることができる．そこで，対数をとった新たな変数 $y_i = \log x_i$ ($x_i = e^{y_i}$) を導入すると，最適化問題 (2.3.3) は以下のように変換できる：

$$\begin{aligned} &\underset{y}{\text{minimize}} \quad \log f_0(e^y) \\ &\text{subject to} \quad \log f_i(e^y) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &\quad \log g_i(e^y) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

ただし，ベクトル $y = [y_1, \dots, y_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ である．ここで，monomial な関数である g について対数を取ると，式 2.3.1 より

$$\begin{aligned} \log g(e^y) &= \log c + a_1 \log x_1 + \dots + a_n \log x_n \\ &= \log c + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

となる．この関数は変数 y についてのアフィン関数，つまり線形関数である．したがって，最適化問題 (2.3.3) の制約条件 (2.3.3c) は，

$$\log c + a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 0 \quad (2.3.7)$$

により表現できることが分かる．また，関数 f については以下の性質が利用できる：

定義 1 以下の式が変数 y について凸関数のとき，関数 $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は対数領域で凸関数と呼ぶ [5]．

$$F(y) = \log f(e^y). \quad (2.3.8)$$

注意 1 Posynomial な関数は対数領域で凸関数である [20]．

これにより，最適化問題 (2.3.3) の目的関数 (2.3.3a) は変数 y についての凸関数となる．さらに，制約条件 (2.3.3b) は，

$$F(y) \leq 0 \quad (2.3.9)$$

と表現される．つまり，最適化問題 (2.3.3) は，対数を取ることによって凸最適化問題の条件を満たすことが分かる．したがって，GP は凸最適化問題に帰着することができ，高速に最適化を行うことができるとともに，解の最適性を保証することができる．

第3章 収束性のための最適資源配置

本章ではまず、非負の線形切り替えシステム [21] を用いたモデルを構築する。そして、構築したモデルを利用して、収束性のための資源配置の最適化問題を設定する。最後に、それらの問題が凸最適化問題へ帰着できることを証明する。

3.1 問題設定

感染率と治癒率を時変にするために、各頂点の感染率と治癒率が時変とする。頂点 v_i の時刻 k における感染率、治癒率を

$$B_k = \begin{bmatrix} \beta_{k,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{k,n} \end{bmatrix}, D_k = \begin{bmatrix} \delta_{k,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{k,n} \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

とおく。これらを利用すると、式 (2.2.9) より、

$$p[k+1] = (B_k A_G - D_k + I)p[k], \quad 0 \leq k \leq K \quad (3.1.2)$$

となり、線形切り替えシステムを用いたモデルが得られる。

感染症対策は、大きく公衆衛生学的対策と医療的対策の二つの柱に分けられる [7]。公衆衛生学的対策とは、感染症の拡大を防ぐために、感染経路を断つための対策である。空港などでの検疫や社会的隔離、つまり学校閉鎖や学級閉鎖といった対策が例として挙げられる。したがって、感染率が公衆衛生学的対策に関わるパラメータである。一方で、医療的対策とは、感染者に対して感染症の治療を行う対策である。ワクチンや治療薬が例として挙げられる。したがって、治癒率が医療的対策に関わるパラメータである。

感染症に依存して感染率や治癒率は決定されるが、こうした対策をとることによって、感染率を下げたり、治癒率を上げたりすることができる。そして、感染症の収束性や伝播する規模は対策に依存しているとともに、感染症の規模によって対策を転換する必要がある。したがって、感染率や治癒率を時変とし、切り替えを可能にすることは意味がある。

3.2 収束性の最適化問題

本章では、式 (3.1.2) のモデルを用いて、収束性を最大化するようなパラメータの組 $\{\beta_{k,i}\}_{k,i}$, $\{\delta_{k,i}\}_{k,i}$ を得ることを考える。

最終時刻における収束性を評価するために、1 ノルムを導入する。ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ とすると、1 ノルムは以下のように表現される：

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (3.2.1)$$

この 1 ノルムを利用し、最終時刻における収束性の指標として、以下の量を導入する：

$$\epsilon = \frac{\|p[K]\|_1}{\|p[0]\|_1}. \quad (3.2.2)$$

また、感染率 $\beta_{k,i}$, 治癒率 $\delta_{k,i}$ はそれぞれすべての添字 i , k について以下のような制約があるとする：

$$0 < \underline{\beta}_{k,i} \leq \beta_{k,i} \leq \bar{\beta}_{k,i} < 1. \quad (3.2.3)$$

$$0 < \underline{\delta}_{k,i} \leq \delta_{k,i} \leq \bar{\delta}_{k,i} < 1. \quad (3.2.4)$$

これらは感染率や治癒率を調整する限度を示している。また、感染率 $\beta_{k,i}$, 治癒率 $\delta_{k,i}$ のコスト関数を $f_{k,i}(\beta_{k,i})$, $g_{k,i}(\delta_{k,i})$ とおくと、時刻 k における感染率 $\beta_{k,i}$, 治癒率 $\delta_{k,i}$ の総コストはそれぞれ

$$F(\beta_{k,i}) = \sum_{i=1}^n f_{k,i}(\beta_{k,i}) \quad (3.2.5)$$

$$G(\delta_{k,i}) = \sum_{i=1}^n g_{k,i}(\delta_{k,i}) \quad (3.2.6)$$

で与えられる。したがって、時刻 k における総コストは

$$\begin{aligned} C_k &= F(\beta_{k,i}) + G(\delta_{k,i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{f_{k,i}(\beta_{k,i}) + g_{k,i}(\delta_{k,i})\} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

となる.

以上の仮定のもとで, 最終時刻における収束性の最適化問題を以下のように定式化する:

問題 1 定数 $\overline{C}$ が与えられたとする. 制約条件 (3.2.3), (3.2.4) とコスト制約

$$C_k \leq \overline{C} \quad (3.2.8)$$

を満たすパラメータの組 $\{\beta_{k,i}\}_{k,i}$, $\{\delta_{k,i}\}_{k,i}$ のうち, 目的関数 (3.2.2) を最小とするものを求めよ.

3.3 凸最適化問題への帰着

問題 1 は非線形最適化問題であるから, 一般には非凸最適化問題となる. しかし, 目的関数と制約条件の形に仮定を置き, 変数変換を行うことで, 凸最適化問題に帰着でき, 効率的に最適化を行うことができる. 本節では, 問題 1 が凸最適化問題へ変換できることを示す.

まず, 目的関数 (3.2.2) の計算を行う. 簡単のため

$$A_k = B_k A_G - D_k + I \quad (3.3.1)$$

とおくと, 式 (3.1.2) は

$$p[k+1] = A_k p[k], \quad 0 \leq k \leq K \quad (3.3.2)$$

と表現できる. したがって, 目的関数 (3.2.2) は

$$\epsilon = \frac{\|A_{K-1} A_{K-2} \cdots A_0 p[0]\|_1}{\|p[0]\|_1} \quad (3.3.3)$$

と計算される.

次に, GP に帰着するために変数変換を行う (同様の変換が先行研究 [5] で用いられている). 新しい変数として,

$$\hat{\delta}_{k,i} = 1 - \delta_{k,i} \quad \left(\hat{D}_k = \text{diag}(\hat{\delta}_{k,i}) = \text{diag}(1 - \delta_{k,i}) \right) \quad (3.3.4)$$

とおくと、式 (3.1.2) は

$$p[k+1] = (B_k A_G + \hat{D}_k)p[k], \quad 0 \leq k \leq K \quad (3.3.5)$$

と変換できる。また、式 (3.2.4) より $\hat{\delta}_{k,i}$ の範囲は

$$0 < 1 - \bar{\delta}_{k,i} \leq \hat{\delta}_{k,i} \leq 1 - \underline{\delta}_{k,i} < 1 \quad (3.3.6)$$

となり、必ず非負であることに注意する。

注意 2 式 (3.2.3), (3.3.6) のもとで、ダイナミクス (3.3.5) は非負の線形切り替えシステムとなる [22]。したがって、初期状態 $p[0]$ の要素が全て非負であれば、式 (2.2.4) は任意の時刻 k で成り立つ。

また、時刻 k における治癒率 $\hat{\delta}_{k,i}$ のコスト関数を

$$\hat{g}_{k,i}(\hat{\delta}_{k,i}) = g_{k,i}(\delta_{k,i}) \quad (3.3.7)$$

を満たすように定義すると、式 (3.2.6) より治癒率 $\hat{\delta}_{k,i}$ の総コストは

$$\hat{G}(\hat{\delta}_{k,i}) = \sum_{i=1}^n \hat{g}_{k,i}(\hat{\delta}_{k,i}) \quad (3.3.8)$$

となる。したがって、式 (3.2.7) より時刻 k における総コストは

$$\begin{aligned} \hat{C}_k &= F(\beta_{k,i}) + \hat{G}(\hat{\delta}_{k,i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{f_{k,i}(\beta_{k,i}) + \hat{g}_{k,i}(\hat{\delta}_{k,i})\} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

で与えられるため、制約条件 (3.2.8) は以下ようになる：

$$\hat{C}_k \leq \bar{C}. \quad (3.3.10)$$

以上を踏まえて、問題 1 の解は以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\begin{aligned} &\underset{\beta_{k,i}, \hat{\delta}_{k,i}}{\text{minimize}} \quad (3.3.3) \\ &\text{subject to} \quad (3.2.3), (3.3.6), (3.3.10). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

以下の定理は本節の主要結果であり、最適化問題 (3.3.11) が GP に帰着できることを示す：

定理 1 任意の $\beta_{k,i}$ と $\hat{\delta}_{k,i}$ について, 関数 $f_{k,i}(\beta_{k,i})$ と $\hat{g}_{k,i}(\hat{\delta}_{k,i})$ が posynomial であると仮定する. このとき, 最適化問題 (3.3.11) は GP である.

証明 1 最適化問題 (3.3.11) が GP であることを示すためには, 目的関数 (3.3.3) と制約条件 (3.2.3), (3.3.6), (3.3.10) が posynomial により記述されることを示せばよい.

まず, 最適化問題 (3.3.11) の目的関数 (3.3.3) を考える. 行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とおき, $C = AB = [c_{ij}]$ を計算すると,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (3.3.12)$$

で表される. このことから行列の積は posynomial であることが分かるので, $A_{K-1}A_{K-2}\cdots A_0$ の各要素は posynomial である. そして, 1 ノルムは各成分の和であるから, 目的関数 (3.3.3) は posynomial である. 制約条件 (3.2.3) と (3.3.6) はそれぞれ

$$\underline{\beta}_{k,i} \beta_{k,i}^{-1} \leq 1, \quad \bar{\beta}_{k,i} \beta_{k,i} \leq 1 \quad (3.3.13)$$

$$(1 - \bar{\delta}_{k,i}) \hat{\delta}_{k,i}^{-1} \leq 1, \quad (1 - \underline{\delta}_{k,i}) \delta_{k,i} \leq 1 \quad (3.3.14)$$

と同値であり, これらの不等式の左辺は $\beta_{k,i}$, $\hat{\delta}_{k,i}$ に関する posynomial である. 制約条件 (3.3.10) は

$$\bar{C} \sum_{i=1}^n \{f_{k,i}(\beta_{k,i}) + \hat{g}_{k,i}(\hat{\delta}_{k,i})\} \leq 1 \quad (3.3.15)$$

と書き直すことができ, この不等式の左辺は仮定により posynomial である. したがって, 最適化問題 (3.3.11) は GP に帰着する. ■

第 4 章 ロバスト性のための最適資源配置

本章ではまず，外乱を含んだ非負の線形システム [23] を用いたモデルを構築する．そして，構築したモデルを利用して，ロバスト性のための資源配置の最適化問題を設定する．最後に，それらの問題が凸最適化問題へ帰着できることを証明する．

4.1 問題設定

式 (2.2.9) をもとに，外乱を考慮した伝播プロセスのダイナミクスとして，以下のような外乱を持つ線形システムを考える：

$$p[k+1] = (BA_G - D + I)p[k] + bw[k], 0 \leq k \leq K. \quad (4.1.1)$$

ここで， $w[k] \in \mathbb{R}$ は時刻 k における外乱，ベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ は外乱が各頂点に及ぼす影響の大きさを表している．本研究では，すべての時刻 k について

$$w[k] \geq 0 \quad (4.1.2)$$

が成り立つとする．また，すべての添字 i について以下のような仮定をおく：

$$b_i \geq 0. \quad (4.1.3)$$

以上の仮定は，外乱が感染症の収束を妨げることを意味する．また，ベクトル b の i 番目の成分 b_i の値が小さい場合，式 (4.1.1) より i 番目の頂点の感染確率の上昇は小さい．反対に， b_i の値が大きい場合は， i 番目の頂点の感染確率の上昇は大きい．したがって，ベクトル b は，外乱によって各頂点がどの程度影響を受けるかを意味している．

4.2 ロバスト性の最適化問題

本章では，式 (4.1.1) のモデルを用いて，外乱による影響を最小化するパラメータの組 $\{\beta_i\}_i$, $\{\delta_i\}_i$ を得ることを考える．

外乱に対するロバスト性を評価するために、 l_1 ノルムを導入する。ベクトル列 $x = \{x[k]\}_{k \leq 0}$ とすると、 l_1 ノルムは以下のように表現される：

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^K \|x[k]\|_1. \quad (4.2.1)$$

ここで、 $\|x[k]\|_1$ は 1 ノルムであり、式 (3.2.1) で表現される量である。この l_1 ノルムを利用し、外乱に対するロバスト性の指標として、以下の量 (l_1 -ゲイン) を導入する：

$$\gamma = \sup_{w \in l_1^+ \setminus \{0\}} \frac{\|p\|_{l_1}}{\|w\|_{l_1}}. \quad (4.2.2)$$

ここで、集合 l_1^+ は l_1 ノルムが有限な非負の数値全体の集合を表し、全ての添え字 i について $p_i[0] = 0$ であると仮定する。

また、前章同様に、感染率 β_i 、治癒率 δ_i はそれぞれすべての添字 i について以下のような制約があるとする：

$$0 < \underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \bar{\beta}_i < 1. \quad (4.2.3)$$

$$0 < \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \bar{\delta}_i < 1. \quad (4.2.4)$$

また、感染率 β_i 、治癒率 δ_i のコスト関数を $f_i(\beta_i)$ 、 $g_i(\delta_i)$ とおくと、時刻 k における感染率 β_i 、治癒率 δ_i の総コストはそれぞれ

$$F(\beta_i) = \sum_{i=1}^n f_i(\beta_i) \quad (4.2.5)$$

$$G(\delta_i) = \sum_{i=1}^n g_i(\delta_i) \quad (4.2.6)$$

で与えられる。したがって、総コストは

$$\begin{aligned} C &= F(\beta_i) + G(\delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \{f_i(\beta_i) + g_i(\delta_i)\} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

となる.

以上の仮定のもとで, 外乱に対するロバスト性の最適化問題を以下のように定式化する:

問題 2 定数 $\overline{C}$ が与えられたとする. 制約条件 (4.2.3), (4.2.4) とコスト制約

$$C \leq \overline{C} \quad (4.2.8)$$

を満たすパラメータの組 $\{\beta_i\}_i, \{\delta_i\}_i$ のうち, 目的関数 (4.2.2) を最小とするものを求めよ.

4.3 凸最適化問題への帰着

問題 2 は, 問題 1 と同様に解析的に解くことが難しい. 特に, 式 (4.2.2) は集合 l_1^+ の無限次元性により直接計算することが困難である. したがって, 本節では定理を利用して, 問題 2 を凸最適化問題へ変換することを考える.

まず, 以下のような非負システム [23] を考える:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bw[k] \\ y[k] = Cx[k] + Dw[k] \end{cases} \quad (4.3.1)$$

ここで, $k \in \mathbb{N}$, $x[k] \in \mathbb{R}^n$, $w[k] \in \mathbb{R}^r$, $y[k] \in \mathbb{R}^q$ とする. このとき, Chen らが提案した以下の定理が成り立つ [24]:

定理 2 正の定数 $\overline{\gamma}$ をとる. 式 (4.3.1) が漸近安定であり, かつ

$$\sup_{w \in l_1^+ \setminus \{0\}} \frac{\|y[k]\|_{l_1}}{\|w[k]\|_{l_1}} < \overline{\gamma} \quad (4.3.2)$$

が成立することの必要十分条件は, 非負の線形システムである式 (4.3.1) について, 不等式

$$A^\top p - p + C^\top \mathbf{1}_q < \mathbf{0} \quad (4.3.3)$$

$$B^\top p + D^\top \mathbf{1}_q - \overline{\gamma} \mathbf{1}_r < \mathbf{0} \quad (4.3.4)$$

を満たすベクトル $p > 0$ が存在することである. ここで, $\mathbf{1}_q = [1, 1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{1}_r = [1, 1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^r$ である.

定理 2 を利用すると、問題 2 の解は以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\begin{aligned}
& \underset{\beta_i, \gamma_i, p}{\text{minimize}} \quad \bar{\gamma} \\
& \text{subject to} \quad (4.2.3), (4.2.4), (4.2.8), \\
& \quad (B_k A_G - D_k + I)^\top p - p + c^\top < 0, \\
& \quad b^\top p - \bar{\gamma} < 0, \\
& \quad p > 0.
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

次に、前章同様に、GP に帰着するための変数変換を行う。新しい変数として、

$$\hat{\delta}_i = 1 - \delta_i \quad \left(\hat{D} = \text{diag}(\hat{\delta}_i) = \text{diag}(1 - \delta_i) \right) \tag{4.3.6}$$

とおくと、式 (4.1.1) は

$$p[k+1] = (B A_G + \hat{D})p[k] + bw[k], \quad 0 \leq k \leq K \tag{4.3.7}$$

と変換できる。また、式 (4.2.4) より $\hat{\delta}_i$ の範囲は

$$0 < 1 - \bar{\delta}_i \leq \hat{\delta}_i \leq 1 - \underline{\delta}_i < 1 \tag{4.3.8}$$

となり、必ず非負であることに注意する。

注意 3 式 (4.1.2), (4.1.3), (4.2.3), (4.3.8) のもとで、ダイナミクス (4.3.7) は非負の線形システムとなる [23]。したがって、初期状態 $p[0]$ の要素が全て非負であれば、式 (2.2.4) は任意の時刻 k で成り立つ。

また、治癒率 $\hat{\delta}_i$ のコスト関数を

$$\hat{g}_i(\hat{\delta}_i) = g_i(\delta_i) \tag{4.3.9}$$

を満たすように定義すると、式 (4.2.6) より治癒率 $\hat{\delta}_i$ の総コストは

$$\hat{G}(\hat{\delta}_i) = \sum_{i=1}^n \hat{g}_i(\hat{\delta}_i) \tag{4.3.10}$$

となる。したがって、式 (4.2.7) より総コストは

$$\begin{aligned}\hat{C} &= F(\beta_i) + \hat{G}(\hat{\delta}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \{f_i(\beta_i) + \hat{g}_i(\hat{\delta}_i)\}\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

で与えられるため、制約条件 (4.2.8) は以下ようになる：

$$\hat{C} \leq \overline{C}.\tag{4.3.12}$$

以上を踏まえて、最適化問題 (4.3.5) の解は以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\underset{\beta_i, \delta_i, p}{\text{minimize}} \quad \overline{\gamma} \tag{4.3.13a}$$

$$\text{subject to} \quad (4.2.3), (4.3.8), (4.3.12), \tag{4.3.13b}$$

$$(BA_{\mathcal{G}} + \hat{D})^{\top} p - p + c^{\top} < 0, \tag{4.3.13c}$$

$$b^{\top} p - \overline{\gamma} < 0, \tag{4.3.13d}$$

$$p > 0. \tag{4.3.13e}$$

以下の定理は本節の主要結果であり、最適化問題 (4.3.13) が GP に帰着できることを示す：

定理 3 任意の β_i と $\hat{\delta}_i$ について、関数 $f_i(\beta_i)$ と $\hat{g}_i(\hat{\delta}_i)$ が posynomial であると仮定する。このとき、最適化問題 (4.3.13) は GP である。

証明 2 最適化問題 (4.3.13) が GP であることを示すためには、目的関数 (4.3.13a) と制約条件 (4.2.3), (4.3.8), (4.3.12), (4.3.13c), (4.3.13d), (4.3.13e) が posynomial により記述されることを示せばよい。

まず、最適化問題 (4.3.13) の目的関数 (4.3.13a) は決定変数に関する posynomial である。そして、制約条件 (4.2.3), (4.3.8) はそれぞれ

$$\underline{\beta}_i \beta_i^{-1} \leq 1, \quad \overline{\beta}_i \beta_i \leq 1 \tag{4.3.14}$$

$$(1 - \overline{\delta}_i) \hat{\delta}_i^{-1} \leq 1, \quad (1 - \underline{\delta}_i) \delta_i \leq 1 \tag{4.3.15}$$

と同値であり，これらの不等式の左辺は $\beta_i, \hat{\delta}_i$ に関する posynomial である．制約条件 (4.3.12) は

$$\overline{C} \sum_{i=1}^n \{f_i(\beta_i) + \hat{g}_i(\hat{\delta}_i)\} \leq 1 \quad (4.3.16)$$

と書き直すことができ，この不等式の左辺は仮定により posynomial である．制約条件 (4.3.13c) は，簡単のため $A = BA_{\mathcal{G}} + \hat{D} = [a_{ij}]$ とおくと，

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} p_j + 1}{p_i} < 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3.17)$$

と書き換えることができ，posynomial により記述される n 個の不等式と同値であることが分かる．次に，制約条件 (4.3.13d) は

$$\bar{\gamma}^{-1} \sum_{i=1}^n b_i p_i < 0 \quad (4.3.18)$$

と同値であり，この不等式の左辺も posynomial である．最後に，制約条件 (4.3.13e) は posynomial である．したがって，最適化問題 (4.3.13) は GP に帰着する． ■

第 5 章 不確かなネットワークのための最適資源配置

本章ではまず，ランダムグラフ [25] を用いたモデルを構築する．そして，構築したモデルを利用して，不確かなネットワークのための資源配置の最適化問題を設定する．最後に，それらの問題が凸最適化問題へ帰着できることを証明する．

5.1 問題設定

まず，式 (2.2.9) より以下のような線形システムを考える：

$$p[k+1] = (BA_G - D + I)p[k]. \quad (5.1.1)$$

本章では，ネットワーク構造が不確かな場合を考えるため，ネットワーク構造を表す隣接行列 A_G が不確実性を持つ．したがって，ネットワーク構造が曖昧な状態を表現するために，ランダムグラフを導入する．

任意の頂点の組 v_i と v_j に対して，定数 $q_{ij} \in [0, 1]$ が存在し，これらの頂点は確率 q_{ij} で隣接していると仮定する．ここで，個々の組の隣接を記述する確率変数は全て独立であると仮定する．このような確率的なネットワークはランダムグラフと呼ばれる [26]．

ランダムグラフの隣接行列を表現するために，確率変数と行列を導入する．まず，確率変数 X_{ij} は確率 q_{ij} で 1，確率 $1 - q_{ij}$ で 0 をとるベルヌーイ分布に従う確率変数とする．そして，行列 A_{ij} は， ij 成分が枝の重み $\mathcal{W}((v_j, v_i))$ ，つまり $[A_{ij}]_{ij} = a_{ij}$ ，その他の成分は 0 の行列である．例えば，行列 $X_{12}A_{12}$ は確率 q_{12} で，

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

となり，確率 $1 - q_{ij}$ で，

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これらを利用すると，ランダムグラフの隣接行列は，

$$A_G = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n X_{ij} A_{ij} \quad (5.1.2)$$

と表現できる．さらに以降では，簡単のため，隣接行列 A_G は対称行列，つまり

$$q_{ij} = q_{ji} \quad (5.1.3)$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (5.1.4)$$

と仮定する．

5.2 収束性確率の最適化問題

本章では，式 (5.1.1) のモデルを用いて，収束性確率を最大化するパラメータの組 $\{\beta_i\}_i$, $\{\delta_i\}_i$ を得ることを考える．

今，式 (5.1.1) の収束性は，ネットワークの構造が確率的に決定されるため，確率変数である．したがって，収束性を評価するために，以下の式を考える：

$$\sigma = P(\lambda_{\max}(BA_G - D + I) \geq t). \quad (5.2.1)$$

ここで， $\lambda_{\max}$ は固有値の最大実部， t は目標とする収束性である．つまり，式 (5.2.1) は目標とする収束性を達成できる確率を示している．

また，前章同様に，感染率 β_i ，治癒率 δ_i はそれぞれ式 (4.2.3)，(4.2.4) の制約があるとする．さらに，感染率 β_i ，治癒率 δ_i のコストは式 (4.2.5)，(4.2.6) で与えられ，総コストは式 (4.2.7) で与えられるとする．

以上の仮定のもとで，収束性確率を最大化する最適化問題を以下のように定式化する：

問題 3 定数 $\bar{C}$ が与えられたとする．制約条件 (4.2.3)，(4.2.4) とコスト制約 (4.2.8) を満たすパラメータの組 $\{\beta_i\}_i$, $\{\delta_i\}_i$ のうち，目的関数 (5.2.1) を最大とするものを求めよ．

5.3 凸最適化問題への帰着

式 (5.2.1) を計算するためには、ランダムグラフのすべての場合を考慮しなければならず、ネットワークの頂点の数を n とおくと、全ての場合の数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個存在する。したがって、ネットワーク構造が大きくなると、計算量が指数関数的に増加し、計算が困難となる。そこで、本節では命題を利用することで、問題 3 が凸最適化問題へ帰着できることを示す。

目的関数 (5.2.1) を直接評価するのは困難であるから、以下の命題を用いる：

命題 1 次式が成り立つ：

$$P\left(\lambda_{\max}(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I) \geq t\right) \leq \inf_{\theta > 0} e^{-\theta t} \operatorname{tr} \mathbb{E} \left[e^{\theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)} \right]. \quad (5.3.1)$$

ただし、 tr は行列のトレースを表す。

証明 3 行列

$$Y = BA_G - D + I$$

を考える。対角行列 $U = \sqrt{B}$ に対して、

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= U^{-1}(BA_G - D + I)U \\ &= U^{-1}BA_GU - U^{-1}DU + I \\ &= \sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I \end{aligned}$$

という相似変換が成り立つので、

$$P(\lambda_{\max}(Y) \geq t) = P\left(\lambda_{\max}(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I) \geq t\right)$$

と書き換えられる。今、行列 $\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I$ は対称であることから、文献 [25] の命題 3.1 より不等式 (5.3.1) が得られる。■

この命題より、

$$\bar{\sigma} = e^{-\theta t} \operatorname{tr} \mathbb{E} \left[e^{\theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)} \right] \quad (5.3.2)$$

とくと、問題 3 の解は以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_i, \gamma_i, p}{\text{minimize}} & (5.3.2) \\ & \text{subject to} & (4.2.3), (4.2.4), (4.2.8). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

以降では、式 (5.3.2) を具体的に計算していく。まず、式 (5.3.2) に現れる指数関数行列は以下のように展開される：

$$e^{\theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B}-D+I)} = I + \theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I) + \frac{\theta^2}{2}(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)^2 + \dots$$

簡単のために、感染率が十分に小さく、かつ治癒率が十分に 1 に近い状況に焦点をあてる。このとき、行列 $\sqrt{B}A_G\sqrt{B}$ と $-D + I$ は共に小さいとみなすことができるため、近似的に以下の式が成り立つ：

$$e^{\theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B}-D+I)} \approx I + \theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I) + \frac{\theta^2}{2}(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)^2. \quad (5.3.4)$$

したがって、式 (5.3.2) を計算するためには、式 (5.3.4) の右辺のトレースを計算する必要がある。まず、右辺第一項のトレースは n と等しい。次に、第二項のトレースを計算すると、

$$\begin{aligned} \text{tr } \theta(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I) &= \theta \text{tr}(\sqrt{B}A_G\sqrt{B}) + \theta \text{tr}(I - D) \\ &= \theta \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \end{aligned}$$

を得る。最後の等式では、行列 $\sqrt{B}A_G\sqrt{B}$ の対角成分は、確率 1 で全て 0 であることを用いた。最後に、第三項のトレースを計算する。 $\theta^2/2$ の項を除くと、以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \text{tr } \mathbb{E} \left[(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)^2 \right] \\ &= \text{tr } \mathbb{E}[\sqrt{B}A_G\sqrt{B}A_G\sqrt{B}] + \text{tr } \mathbb{E} \left[\sqrt{B}A_G\sqrt{B}(I - D) \right] \\ & \quad + \text{tr } \mathbb{E} \left[(I - D)\sqrt{B}A_G\sqrt{B} \right] + \text{tr } \mathbb{E}[(I - D)^2] \\ &= \text{tr } \sqrt{B} \mathbb{E}[A_G\sqrt{B}A_G] \sqrt{B} + \text{tr } \sqrt{B} \mathbb{E}[A_G] \sqrt{B}(I - D) \\ & \quad + \text{tr}(I - D) \sqrt{B} \mathbb{E}[A_G] \sqrt{B} + \text{tr}(I - D)^2 \end{aligned}$$

ここで、行列 $\sqrt{B}$ と $I - D$ は対角行列であり、かつ行列 $\mathbb{E}[A_G]$ は対角成分を持たないことから、

$$\begin{aligned}\sqrt{B}\mathbb{E}[A_G]\sqrt{B}(I - D) &= O, \\ (I - D)\sqrt{B}\mathbb{E}[A_G]\sqrt{B} &= O\end{aligned}$$

であることに注意すると

$$\mathrm{tr} \mathbb{E} \left[(\sqrt{B}A_G\sqrt{B} - D + I)^2 \right] = \mathrm{tr} \sqrt{B}\mathbb{E}[A_GBA_G]\sqrt{B} + \mathrm{tr}(I - D)^2 \quad (5.3.5)$$

を得る。式 (5.3.5) の右辺第二項は、 $\mathrm{tr}(I - D)^2 = \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i)^2$ と簡単に計算できる。右辺第一項を計算するにあたり、以下の性質を利用する：

注意 4 隣接行列 A と任意の自然数 ℓ に対して、 A^ℓ の成分 $[A^\ell]_{ij}$ は、頂点 v_i から頂点 v_j への距離 ℓ の経路の総数と等しい。

この性質を利用すると、期待値 $\mathbb{E}[A_GBA_G]$ の対角成分は、各頂点から距離 2 で自身に戻ってくる経路の期待値と関連することが分かる。さらに、この性質を満たす経路は二つの異なる頂点間を往復する経路しか存在しない。このことに注意すると、

$$\mathbb{E}[A_GBA_G] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 1}^n q_{1j} a_{1j}^2 \beta_j & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1, j \neq n}^n q_{nj} a_{nj}^2 \beta_j \end{bmatrix}$$

が得られる。以上の議論をまとめると、式 (5.3.5) の右辺について

$$\mathrm{tr} \sqrt{B}\mathbb{E}[A_GBA_G]\sqrt{B} + \mathrm{tr}(I - D)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} a_{ij}^2 \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i)^2$$

が得られる。したがって、式 (5.3.2) の近似的な評価

$$\bar{\sigma} \approx e^{-\theta t} \left(n + \theta \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) + \frac{\theta^2}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} a_{ij}^2 \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i)^2 \right) \right) \quad (5.3.6)$$

が得られた．よって，最適化問題 (5.3.3) は，近似的に以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_i, \gamma_i, p}{\text{minimize}} & (5.3.6) \\ & \text{subject to} & (4.2.3), (4.2.4), (4.2.8). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

次に，前章同様に，GP に帰着するための変数変換を行う．新しい変数として，式 (4.3.6) とおくと，目的関数 (5.3.6) は以下のように書き換えられる：

$$\bar{\sigma} \approx e^{-\theta t} \left(n + \theta \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_i + \frac{\theta^2}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} a_{ij}^2 \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_i^2 \right) \right). \quad (5.3.8)$$

また，治癒率 $\hat{\delta}_i$ のコストを式 (4.3.10) とおくと，総コストは式 (4.3.11) で与えられる．したがって，制約条件は式 (4.3.12) となる．

以上を踏まえて，最適化問題 (5.3.7) の解は以下の最適化問題を解くことにより得られることが分かる：

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_i, \hat{\delta}_i, p}{\text{minimize}} & (5.3.8) \\ & \text{subject to} & (4.2.3), (4.3.8), (4.3.12). \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

以下の定理は本節の主要結果であり，最適化問題 (5.3.9) が GP に帰着できることを示す：

定理 4 任意の β_i と $\hat{\delta}_i$ について，関数 $f_i(\beta_i)$ と $\hat{g}_i(\hat{\delta}_i)$ が posynomial であると仮定する．このとき，最適化問題 (5.3.9) は GP である．

証明 4 最適化問題 (5.3.9) が GP であることを示すためには，目的関数 (5.3.8) と制約条件 (4.2.3)，(4.3.8)，(4.3.12) が posynomial により記述されることを示せばよい．

まず，最適化問題 (5.3.9) の目的関数 (5.3.8) は決定変数に関する posynomial である．また，制約条件 (4.2.3) と (4.3.8)，(4.3.12) は前章より posynomial である．したがって，最適化問題 (5.3.7) は GP に帰着する． ■

第 6 章 数値例と考察

本章では，前章までに述べた手法の有効性を確認するために，拠点空港 [27] のネットワークを例題として検証を行う．

6.1 拠点空港のネットワーク

検証のためのネットワークとして，国内の拠点空港のネットワークを利用する．拠点空港は空港法第 4 条第 1 項各号で掲げられた空港であり，国際航空輸送網および国内航空輸送網の拠点となる空港である [27]．成田国際空港や中部国際空港など計 28 空港が指定されており，それらは計 216 路線によって結ばれている（図 6.1）．ただし，簡単のため，枝の重みはすべて 1 とした．

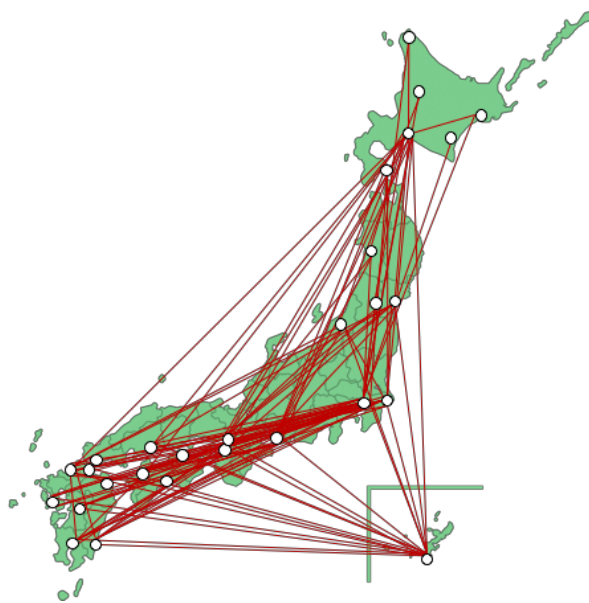


図 6.1 拠点空港のネットワーク

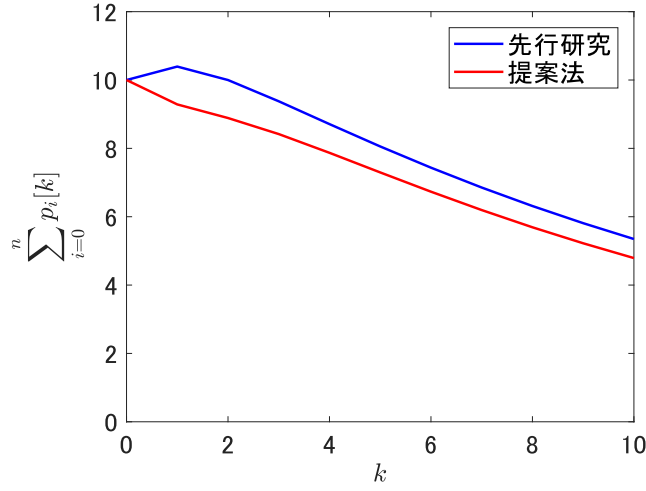


図 6.2 感染確率の総和の推移

6.2 収束性のための資源配置の最適化手法

6.2.1 数値例

前節で述べた拠点空港のネットワークを用いて、3章で述べた手法の有効性を検証する。コスト関数はそれぞれ以下のように設定した：

$$f_{k,i}(\beta_{k,i}) = \frac{\beta_{k,i}^p - \bar{\beta}^p}{\underline{\beta}^p - \bar{\beta}^p}. \quad (6.2.1)$$

$$g_{k,i}(\delta_{k,i}) = \frac{\hat{\delta}_{k,i}^q - (1 - \underline{\delta})^q}{(1 - \bar{\delta})^q - (1 - \underline{\delta})^q}. \quad (6.2.2)$$

このコスト関数は、 $f_{k,i}(\underline{\beta}) = 0$, $g_{k,i}(\underline{\delta}) = 0$, $f_{k,i}(\bar{\beta}) = 1$, $g_{k,i}(\bar{\delta}) = 1$ となるように正規化されている。また、最適化の段階で無視できる定数項を除けば、posynomialであるから、3章で述べた手法により凸最適化問題に帰着できる。パラメータは、先行研究 [5] を参考に、すべての時刻 k 、頂点 i について $\underline{\beta} = 3.1 \times 10^{-2}$, $\bar{\beta} = 5.2 \times 10^{-2}$, $\underline{\delta} = 0.1$, $\bar{\delta} = 0.5$, $p = -1$, $q = -1$ とした。また、初期値は国際線乗降客数上位 10 空港を 1 とし、その他の空港は 0 とした。

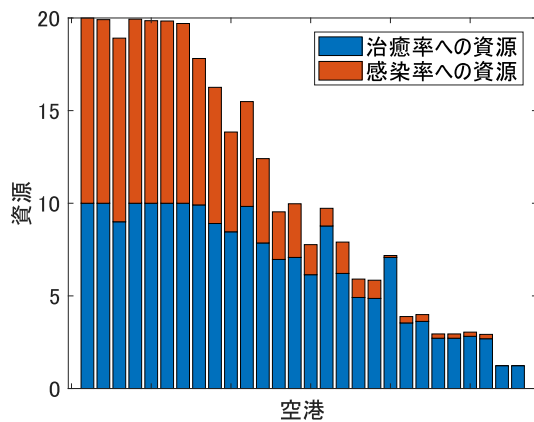


図 6.3 空港ごとの資源配置（次数中心性の降順）

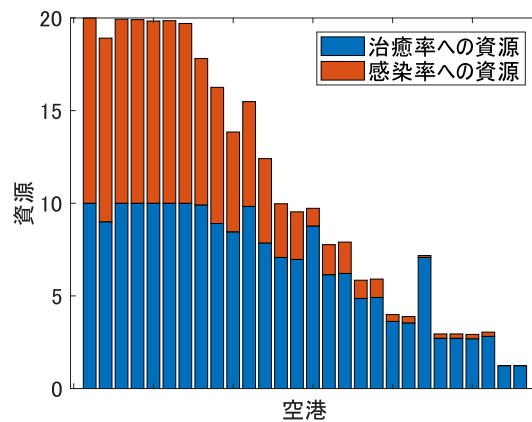


図 6.4 空港ごとの資源配置（ページランクの降順）

最適な資源配置を行なったときの感染確率の総和の推移を示した図が図 6.2 である。比較として，先行研究 [5] で得られた結果との比較を行った。そして，そのときの空港ごとの資源配置を表 6.1 に示す。ただし，上段が治癒率への資源，下段が感染率への資源である。

表 6.1 を見やすくするために，ネットワーク科学における中心性を導入する。図 6.3, 6.4 は空港ごとの資源配置を示したものである。ただし，横軸は，図 6.3 は空港を次数中心性が高い順に，図 6.4 は空港をページランクが高い順に並べている。ここで，次数中心性とページランクの定義は以下の通りである [4]。

次数中心性 次数中心性はある頂点とつながっている頂点の総和である。つながりの方向がある場合は，ある頂点に入ってくる枝とある頂点から出ていく枝の 2 種類がある。それぞれを入次数中心性，出次数中心性と呼ぶ。

ページランク ページランクはグーグルの検索エンジンに利用されている指標である。この中心性は，大まかに以下の三つの観点から中心性を決定している。

- 多くのページからリンクされるページは重要。
- 重要なページからリンクされるページは重要。
- 厳選されたリンクを受けることは貴重。

表 6.1 各時刻の空港ごとの資源配置

時刻 t			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	成田国際空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.91
2	中部国際空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.85
3	関西国際空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.91
		感染率への資源	1	1	1	0.88	0.81	0.76	0.72	0.67	0.60	0.45
4	大阪国際空港	治癒率への資源	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.91
5	東京国際空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	新千歳空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.84
7	稚内空港	治癒率への資源	0	0	0.14	0.25	0.30	0.33	0.36	0.40	0.45	0.48
		感染率への資源	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	釧路空港	治癒率への資源	0	0	0.14	0.25	0.30	0.33	0.36	0.40	0.45	0.48
		感染率への資源	0.23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	函館空港	治癒率への資源	0	0.25	0.54	0.68	0.75	0.77	0.77	0.75	0.76	0.88
		感染率への資源	1	0.47	0.14	0.015	0	0	0	0	0	0
10	仙台空港	治癒率への資源	0	0.81	0.94	0.97	0.99	0.98	0.97	0.96	0.94	0.90
		感染率への資源	1	1	0.72	0.54	0.45	0.40	0.37	0.34	0.31	0.26
11	新潟空港	治癒率への資源	0	0.43	0.66	0.78	0.83	0.84	0.83	0.83	0.84	0.93
		感染率への資源	1	0.71	0.33	0.18	0.11	0.072	0.043	0.021	0.018	0.077
12	広島空港	治癒率への資源	1	1	1	0.97	0.85	0.80	0.77	0.76	0.77	0.85
		感染率への資源	0.27	0.048	0	0	0	0	0	0	0	0
13	高松空港	治癒率への資源	1	1	0.95	0.69	0.59	0.55	0.53	0.54	0.57	0.66
		感染率への資源	0.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	松山空港	治癒率への資源	0	1	1	1	1	1	1	1	0.97	0.93
		感染率への資源	1	1	1	0.86	0.75	0.68	0.62	0.55	0.47	0.41
15	高知空港	治癒率への資源	0	0	0.21	0.34	0.41	0.44	0.47	0.50	0.55	0.62
		感染率への資源	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	福岡空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.70
17	北九州空港	治癒率への資源	0	0	0.14	0.26	0.32	0.35	0.38	0.41	0.46	0.50
		感染率への資源	0.23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	長崎空港	治癒率への資源	0	0.45	0.68	0.80	0.84	0.86	0.85	0.84	0.83	0.93
		感染率への資源	1	0.73	0.36	0.22	0.15	0.12	0.093	0.067	0.044	0.10
19	熊本空港	治癒率への資源	0	0.25	0.55	0.69	0.76	0.78	0.78	0.76	0.76	0.89
		感染率への資源	1	0.49	0.16	0.037	0	0	0	0	0	0
20	大分空港	治癒率への資源	0	0.056	0.40	0.55	0.60	0.62	0.63	0.63	0.66	0.77
		感染率への資源	0.81	0.18	0	0	0	0	0	0	0	0
21	宮崎空港	治癒率への資源	0	0.67	0.81	0.90	0.93	0.93	0.92	0.90	0.87	0.93
		感染率への資源	1	1	0.59	0.42	0.35	0.30	0.27	0.23	0.19	0.21
22	鹿児島空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	0.98	0.92	0.93
		感染率への資源	1	1	0.73	0.57	0.49	0.45	0.41	0.38	0.32	0.31
23	那覇空港	治癒率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		感染率への資源	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.94
24	旭川空港	治癒率への資源	0	0	0.13	0.24	0.29	0.33	0.36	0.40	0.45	0.48
		感染率への資源	0.24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	帯広空港	治癒率への資源	0	0	0	0	0.053	0.13	0.20	0.26	0.30	0.28
		感染率への資源	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	秋田空港	治癒率への資源	0	0.057	0.40	0.54	0.59	0.61	0.62	0.63	0.65	0.76
		感染率への資源	0.81	0.17	0	0	0	0	0	0	0	0
27	山形空港	治癒率への資源	0	0	0.23	0.36	0.42	0.45	0.48	0.51	0.55	0.63
		感染率への資源	0.37	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	山口宇部空港	治癒率への資源	0	0	0	0	0.053	0.13	0.20	0.26	0.30	0.28
		感染率への資源	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

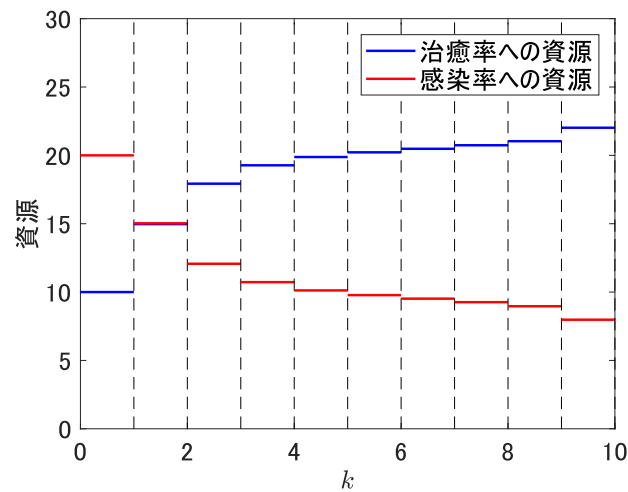


図 6.5 資源配置の推移

つまり、図 6.3, 6.4 は重要な空港順に並べたものである。そして、重要な空港ほど多くの資源が配置されていることが分かる。

図 6.2 より、先行研究と比較して提案法の方が感染確率を抑えられていることが分かる。このような差が見られるのは資源配置の切り替えを行ったためであり、感染症対策には戦略の切り替えが有効であることが確認できた。資源配置の時系列の様子を示した図が図 6.5 である。

6.2.2 考察

提案手法では、目的関数 (3.3.3) に初期値が含まれている。したがって、最適化の結果も初期値に依存している。そこで、初期値を変化させた時の比較を行う。

図 6.6, 6.7 は、初期状態でページランクが上位 10 空港を 1, その他の空港を 0 とした場合の空港ごとの資源配置を示したものである。ただし、横軸は、図 6.6 は空港を次数中心性が高い順に、図 6.7 は空港をページランクが高い順に並べている。また、図 6.8, 6.9 は、初期状態でページランクが下位 10 空港を 1, その他の空港を 0 とした場合の空港ごとの資源配置を示したものである。ただし、横軸は、図 6.8 は空港を次数中心性が高い順に、図 6.9 は空港をページランクが高い順に並

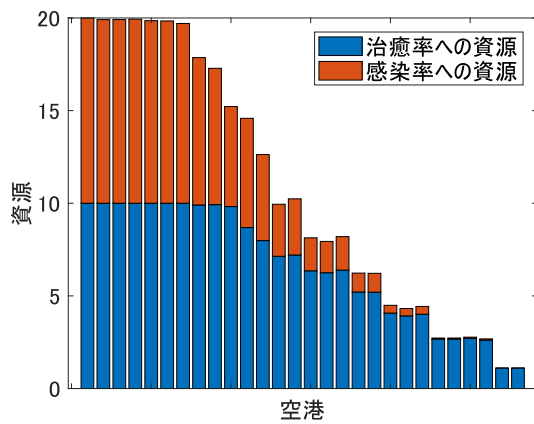


図 6.6 初期値がページランク上位 10 空港のときの空港ごとの資源配置（次数中心性の降順）

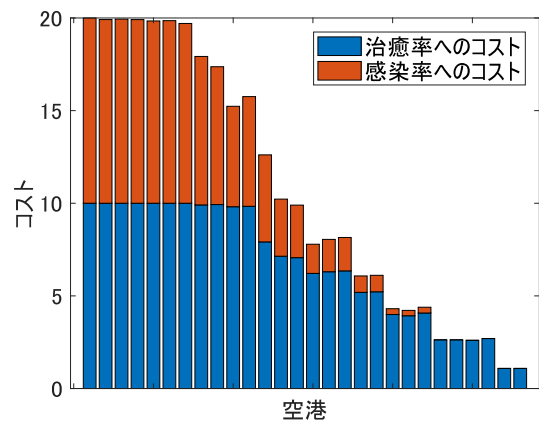


図 6.7 初期値がページランク上位 10 空港のときの空港ごとの資源配置（ページランクの降順）

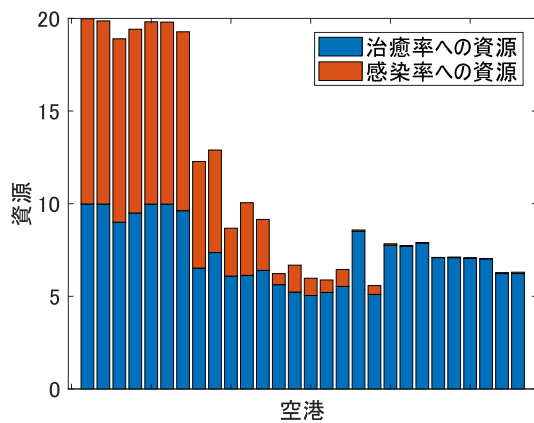


図 6.8 初期値がページランク下位 10 空港のときの空港ごとの資源配置（次数中心性の降順）

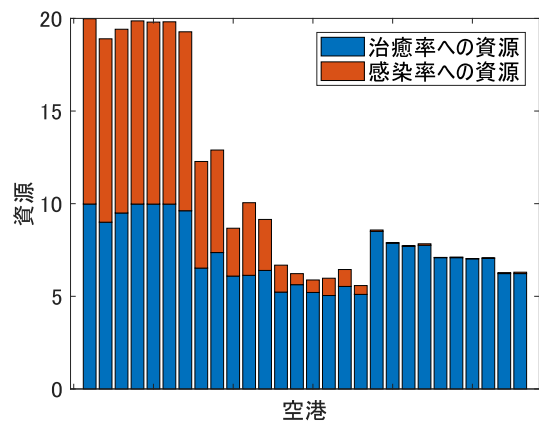


図 6.9 初期値がページランク下位 10 空港のときの空港ごとの資源配置（ページランクの降順）

べている。

初期状態で感染している空港へ多く資源が配置されるが、その空港の重要度が高いか低いかによって戦略が異なることが分かる。重要度が高い空港が初期状態で感

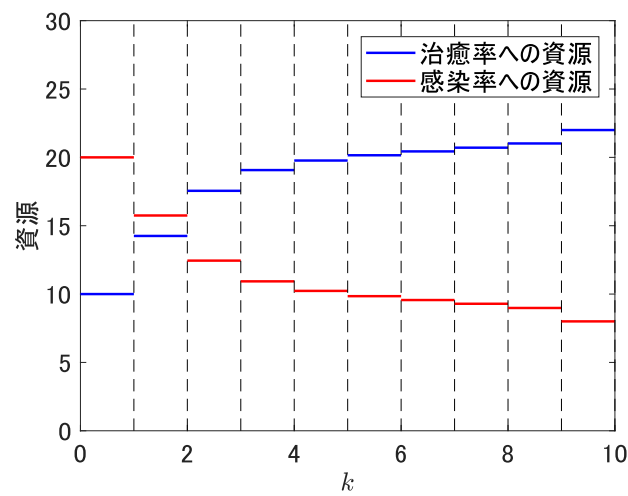


図 6.10 初期値がページランク上位 10 空港のときの資源配置の推移

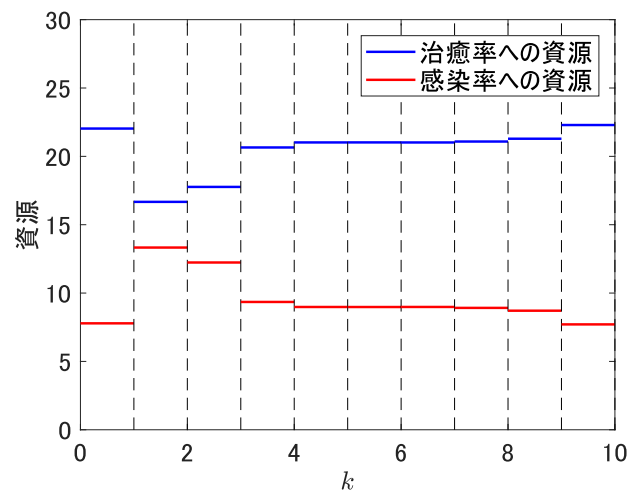


図 6.11 初期値がページランク下位 10 空港のときの資源配置の推移

染している場合，感染している空港には感染率への資源，治癒率への資源の両方が多く配置されることが分かる．つまり，感染している空港からの感染拡大を防ぎつつ，感染症の抑え込みを行う戦略が得られた．対して，重要度が低い空港が感染している場合，感染している空港には治癒率への資源は多く配置されるが，感染率への資源は配置はされないことが分かる．これは，重要度が低い空港は他の空港へ感染が拡大する可能性が低いため，感染症の抑え込みに重点をおく戦略の方が良いこ

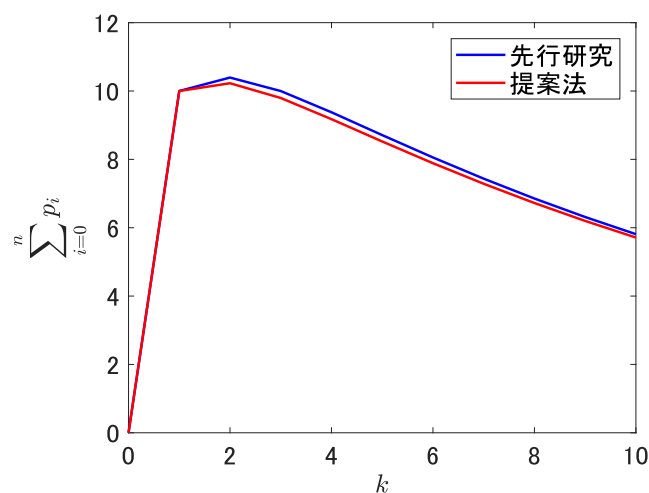


図 6.12 感染確率の総和の推移

とを示している。

次に、図 6.10 は、初期状態でページランクが上位 10 空港を 1、その他の空港を 0 とした場合の資源配置の推移である。また、図 6.11 は、初期状態でページランクが下位 10 空港を 1、その他の空港を 0 とした場合の資源配置の推移である。

資源配置が定常状態になったときの資源の割合は、初期状態に関わらず、治癒率への資源が多い傾向があることが分かる。つまり、基本的な対策の方針は、感染症の抑え込みが中心となることが分かる。しかし、過渡期での割合は異なっており、重要度が低い空港が感染している場合は相対的に治癒率への資源が多くなる傾向がある。これも重要度が低い空港は隣接している空港が少ないため、感染拡大を防ぐ戦略より感染症を抑え込む戦略の方が全体の感染確率を抑えることができることを示している。

6.3 ロバスト性のための資源配置の最適化手法

6.3.1 数値例

前節同様に、拠点空港のネットワークを用いて、4 章で述べた手法の有効性を検証する。コスト関数やパラメータは前節同様とした。外乱による影響を受ける空港

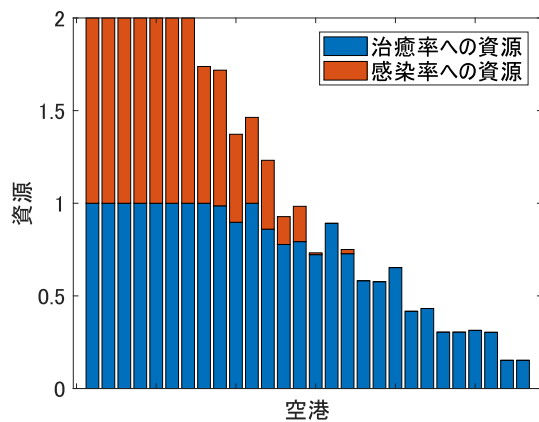


図 6.13 空港ごとの資源配置（次数中心性の降順）

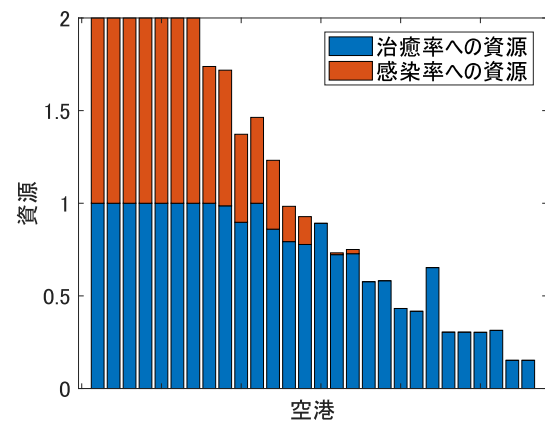


図 6.14 空港ごとの資源配置（ページランクの降順）

は、国際線乗降客数上位 10 空港を 1、その他の空港を 0 にした。

最適な資源配置を行なったときの感染確率の総和の推移を示した図が図 6.12 である。ただし、外乱は時刻 0 で大きさ 1 のインパルス入力とした。また、比較のため、先行研究 [5] の結果、つまり収束性のための最適資源配置を行った結果との比較を行った。

次に、空港ごとの資源配置を表 6.2 に示す。ただし、左列が治癒率への資源、右列が感染率への資源である。また、前節同様に、資源配置を見やすくした図が図 6.13、図 6.14 である。ただし、横軸は、図 6.13 は空港を次数中心性が高い順に、図 6.14 は空港をページランクが高い順に並べている。

図 6.12 より、先行研究と比較して提案法の方が外乱による影響を抑えられていることが分かるが、大きな差ではないことが分かる。これについては次項で考察を行う。

表 6.2 空港ごとの資源配置

	治癒率への資源	感染率への資源
1 成田国際空港	1	1
2 中部国際空港	1	1
3 関西国際空港	1	0.74
4 大阪国際空港	1	1
5 東京国際空港	1	1
6 新千歳空港	1	1
7 稚内空港	0.30	0
8 釧路空港	0.30	0
9 函館空港	0.72	0
10 仙台空港	0.90	0.48
11 新潟空港	0.78	0.15
12 広島空港	0.89	0
13 高松空港	0.65	0
14 松山空港	0.99	0.73
15 高知空港	0.42	0
16 福岡空港	1	1
17 北九州空港	0.31	0
18 長崎空港	0.79	0.19
19 熊本空港	0.73	0.023
20 大分空港	0.58	0
21 宮崎空港	0.86	0.37
22 鹿児島空港	1	0.46
23 那覇空港	1	1
24 旭川空港	0.30	0
25 帯広空港	0.15	0
26 秋田空港	0.58	0
27 山形空港	0.43	0
28 山口宇部空港	0.15	0

表 6.3 目的関数の誤差 (次数中心性)

次数中心性	上位 10 空港	中位 10 空港	下位 10 空港
目的関数の誤差 (%)	0.54	4.12	22.11

表 6.4 目的関数の誤差 (ページランク)

ページランク	上位 10 空港	中位 10 空港	下位 10 空港
目的関数の誤差 (%)	0.57	4.12	26.38

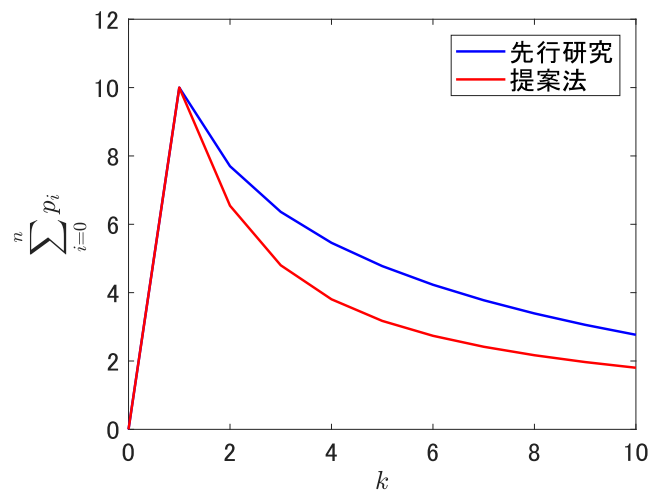


図 6.15 感染確率の総和の推移 (ページランク下位 10 空港)

6.3.2 考察

前項より，先行研究と提案法とでは大きな差がなかった．これについて，外乱による影響を受ける空港を変化させ，比較を行う．

表 6.3, 6.4 は，先行研究と提案法のそれぞれから計算される目的関数 γ の誤差を示した表である．また，横軸は，表 6.3 は次数中心性が上位 10 空港，中位 10 空港，下位 10 空港を 1 としたことを意味している．そして，同様に表 6.4 はページランクが上位 10 空港，中位 10 空港，下位 10 空港を 1 としたことを意味している．これらの表から，重要度が高い空港が外乱による影響を受けた場合は，収束性とロバスト性のそれぞれの最適化結果は差は小さいことが分かる．反対に，重要度

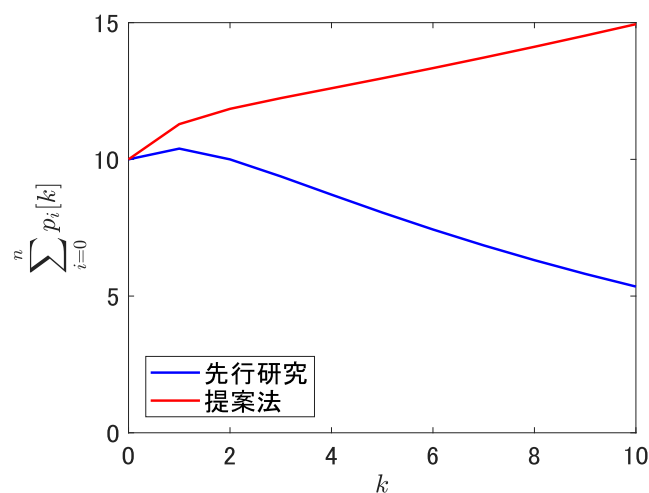


図 6.16 感染確率の総和の推移

が低い空港が外乱による影響を受けた場合は、収束性とロバスト性のそれぞれの最適化結果は差が大きいことが分かる。逆を言えば、重要度が高い空港が外乱による影響を受ける場合は、先行研究によって得られる戦略でも大きな影響はないが、重要度が低い空港が外乱による影響を受ける場合は先行研究で得られる戦略では不十分だと言える。例えば、図 6.15 のようにページランクの下位 10 空港が外乱による影響を受ける場合は、先行研究と提案法とでは差が見られる。

6.4 不確かなネットワークのための資源配置の最適化手法

6.4.1 数値例

前節同様に、拠点空港のネットワークを用いて、5 章で述べた手法の有効性を検証する。パラメータは $\theta = 5$ とし、そのほかのコスト関数やパラメータは前節同様とした。初期値は国際線乗降客数上位 10 空港を 1 とし、その他の空港は 0 とした。空港同士が隣接する確率については以下のような状況を考える。

本来であれば、全ての空港についてどの空港と隣接しているかが分かった状態で資源配置を行うことが理想である。しかし、隣接情報を得るためにもコストが必要となる状況を考える。そのため、コスト制約によって全空港の隣接情報を得られ

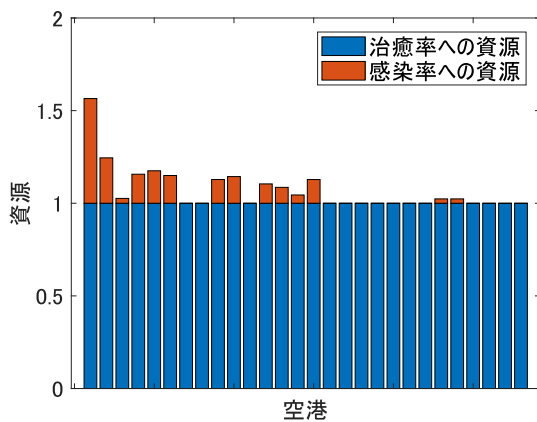


図 6.17 空港ごとの資源配置（次数中心性の降順）

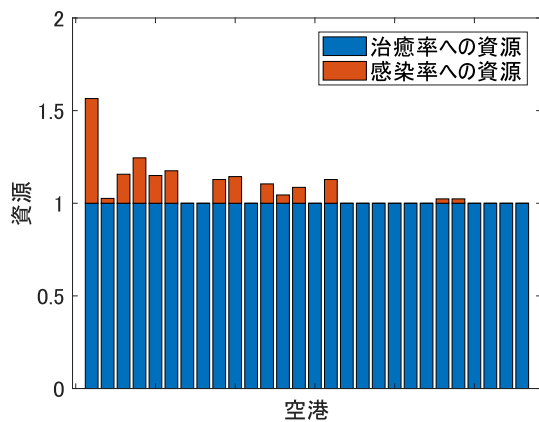


図 6.18 空港ごとの資源配置（ページランクの降順）

ず，ネットワークの一部分のみの構造が分かっている状態で資源配置を行わなければならない状況が考えられる．今回は全 28 空港のうち，国際線乗降客数上位 10 空港については，どの空港と隣接するかを調査し，隣接情報を取得できているとする．また，その他の 18 空港についてはどの空港と隣接しているかがわからないため，確率 0.5 で他の空港と隣接しているとする．つまり，ネットワーク構造が一部欠落している状態で資源配置を行うことを考える．

最適な資源配置を行なったときの感染確率の総和の推移を示した図が図 6.16 である．また，比較のため，先行研究 [5] の結果，つまり全空港の隣接情報が分かっている場合の最適化結果との比較を行った．

次に，空港ごとの資源配置を表 6.7 に示す．ただし，左列が治癒率への資源，右列が感染率への資源である．また，前節同様に，資源配置を見やすくした図が図 6.17，図 6.18 である．ただし，横軸は，図 6.17 は空港を次数中心性が高い順に，図 6.18 は空港をページランクが高い順に並べている．これらの図から，隣接情報が不確かな状態では，治癒率へ最大限資源を配置する戦略が良いことが分かる．

図 6.16 より，得られた最適解では発散していることが分かる．これは最適化問題の定式化過程での近似や隣接情報の制限によって，適切な資源配置を得られていないことを示している．しかし，実際の問題では，限られた情報の中で資源配置を

表 6.5 固有値の最大実部の最適解との誤差（ページランク上位について検索した場合）

ページランク	上位 5 空港	上位 10 空港	上位 15 空港	上位 20 空港	上位 25 空港
最適解との誤差 (%)	12.54	11.79	11.11	10.89	10.80

表 6.6 固有値の最大実部の最適解との誤差（ページランク下位について検索した場合）

ページランク	下位 5 空港	下位 10 空港	下位 15 空港	下位 20 空港	下位 25 空港
最適解との誤差 (%)	12.78	12.19	11.27	11.03	10.85

行わなければならない状況も考えられる。本手法では、このように限られた情報で最大限適切な結果を得られる手法である。次項では、隣接情報を取得する空港と空港数を変化させたときの比較を行う。

6.4.2 考察

本項では、隣接情報を取得する空港と空港数を変化させたときの比較を行う。表 6.5, 6.6 は、先行研究と提案法のそれぞれから計算される固有値の最大実部の誤差を示した表である。また、横軸は、表 6.5 はページランクが上位 5 空港, 上位 10 空港, 上位 15 空港, 上位 20 空港, 上位 25 空港を検索し、隣接する空港が分かっていることを意味している。そして、同様に、表 6.6 はページランクが下位 5 空港, 下位 10 空港, 下位 15 空港, 下位 20 空港, 下位 25 空港を検索し、隣接する空港が分かっていることを意味している。

隣接情報を取得する空港数を増やすと誤差が小さくなることが分かる。また、隣接情報を取得する空港については、空港数が少ないときは重要度が高い空港を検索する方が誤差が少ないことが分かる。しかし、ある程度隣接情報を取得する空港数が増えると、検索する空港による違いが少なくなることが分かる。したがって、検索する空港が限られている状況では、検索する空港に依存度が高いことが分かった。

表 6.7 空港ごとの資源配置

	治癒率への資源	感染率への資源
1 成田国際空港	1	0.25
2 中部国際空港	1	0.18
3 関西国際空港	1	0
4 大阪国際空港	1	0.026
5 東京国際空港	1	0.57
6 新千歳空港	1	0.15
7 稚内空港	1	0.024
8 釧路空港	1	0.024
9 函館空港	1	0.13
10 仙台空港	1	0.14
11 新潟空港	1	0.086
12 広島空港	1	0
13 高松空港	1	0
14 松山空港	1	0.13
15 高知空港	1	0
16 福岡空港	1	0
17 北九州空港	1	0
18 長崎空港	1	0.045
19 熊本空港	1	0
20 大分空港	1	0
21 宮崎空港	1	0.10
22 鹿児島空港	1	0
23 那覇空港	1	0.16
24 旭川空港	1	0
25 帯広空港	1	0
26 秋田空港	1	0
27 山形空港	1	0
28 山口宇部空港	1	0

第 7 章 結論

本論文では、三点に焦点を当てて、先行研究 [5] の拡張を行った。

一つ目は資源配置の切り替えである。資源配置の切り替えを可能とするために、線形切り替えシステムを用いた SIS モデルを提案した。その上で、1 ノルムを利用した収束性の指標を導入し、収束性の最適化問題を設定した。そして、変数変換を行うことで、この最適化問題が凸最適化問題に帰着することを示した。

二つ目は外乱の考慮である。外乱を含んだ SIS モデルを提案し、外乱による影響を最小化することを考えた。そのために、 l_1 ノルムを利用して、外乱による影響を最小化するロバスト最適化問題を設定した。そして、変数変換と定理を用いて、この最適化問題が凸最適化問題に帰着することを証明した。

三つ目はネットワーク構造の不確かさである。ネットワーク構造の不確かさを表現するために、確率を用いたネットワーク表現を導入した。このモデルを元に、収束性確率の最適化問題を設定した。そして、命題と近似表現を利用して、この最適化問題が凸最適化問題に帰着することを導いた。

最後に、空港のネットワークを利用して、本手法の有効性を検証した。

謝辞

本研究を進めるにあたり，主指導教員として，制御工学を基礎から教えていただいた奈良先端科学技術大学院大学知能システム制御研究室の杉本謙二教授に心より御礼申し上げます。

ご多忙の中，副指導教員を引き受けていただき，ゼミナール等で貴重なご意見を賜りました大規模システム管理研究室の笠原正治教授に深く御礼申し上げます。

研究会等で率直なご指導およびご助言を賜りましたロボットラーニング研究室の松原崇充特任准教授に深く御礼申し上げます。

小蔵正輝助教には，本研究の直接のご指導をいただき，学会発表の指導など親身になって指導していただきました。また，研究以外でもさまざまなアドバイスをいただき，充実した学生生活を送ることができました。心より感謝申し上げます。

研究会等での有益なご意見や普段の研究室生活でのご指導をいただきました小林泰介助教に深く御礼申し上げます。

学会の原稿についての的確なご指導をいただきました国立情報学研究所の岸田昌子様に深く感謝申し上げます。

出張の手続きなど研究室生活のさまざまな場面でサポートしていただきました本研究室秘書の林英子様にも深く感謝申し上げます。

最後に，輪講や研究会などでご指導，ご助言をいただきました先輩方，学生生活の貴重な2年間を共有し，有意義なものにしてくれた同期，今後の活躍が期待される後輩に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Wood PHN, "The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its applications," Immunology, Vol. 34, No. 5, pp. 955-956, 1978.
- [2] M. Garetto and W. Gong and D. Towsley, "Modeling malware spreading dynamics," IEEE INFOCOM 2003. Twenty-second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, Vol. 3, pp. 1869-1879, 2003.
- [3] S. Roy and M. Xue and S. K. Das, "Security and Discoverability of Spread Dynamics in Cyber-Physical Networks," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, Vol. 23, No. 9, pp. 1694-1707, 2012.
- [4] 増田直紀, 今野紀雄, "複雑ネットワーク 基礎から応用まで," 近代科学社, 2010.
- [5] V. M. Preciado and M. Zargham and C. Enyioha and A. Jadbabaie and G. J. Pappas, "Optimal Resource Allocation for Network Protection Against Spreading Processes," IEEE Transactions on Control of Network Systems, Vol. 1, No. 1, pp. 99-108, 2014.
- [6] 上田博三, "新型インフルエンザ対策の経緯," 日本公衆衛生雑誌, Vol. 57, No. 3, pp. 157-164, 2010.
- [7] 尾身茂, "新型インフルエンザ：公衆衛生的観点から," 日本公衆衛生雑誌, Vol. 56, No. 7, pp. 439-445, 2009.
- [8] C. Nowzari, V. M. Preciado, and G. J. Pappas, "Analysis and control of epidemics: A survey of spreading processes on complex networks," IEEE Control Systems, Vol. 36, pp. 26-46, 2016.
- [9] 小蔵正輝, "複雑ネットワークにおける最適資源配置 — Geometric program によるアプローチ —," 電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ IEICE Fundamentals Review, Vol. 12, pp. 191-200, 2019.
- [10] M. Ogura and V. M. Preciado, "Optimal Design of Switched Networks of Positive Linear Systems via Geometric Programming," IEEE Transactions on Control of Network Systems, Vol. 4, No. 2, pp. 213-222, 2017.

- [11] Van Mieghem, Piet and Cator, Eric, "Epidemics in networks with nodal self-infection and the epidemic threshold," *Phys. Rev. E*, Vol. 86, No. 1, pp. 016116, 2012.
- [12] P. Holme and N. Litvak, "Cost-efficient vaccination protocols for network epidemiology," *PLOS Computational Biology*, Vol. 13, pp. e1005696, 2017.
- [13] G. H. Weiss and M. Dishon, "On the Asymptotic Behavior of the Stochastic and Deterministic Models of an Epidemic," *Mathematical Biosciences*, Vol. 11, No. 3, pp. 261-265, 1971.
- [14] Yang Wang and D. Chakrabarti and Chenxi Wang and C. Faloutsos, "Epidemic spreading in real networks: an eigenvalue viewpoint," *22nd International Symposium on Reliable Distributed Systems*, 2003. Proceedings, pp. 25-34, 2003.
- [15] P. Van Mieghem and J. Omic and R. Kooij, "Virus Spread in Networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 17, No. 1, pp. 1-14, 2009.
- [16] Barrat, Alain and Barthélemy, Marc and Vespignani, Alessandro, "Dynamical Processes on Complex Networks," Cambridge University Press, 2008.
- [17] Victor M. Preciado and Michael Zargham and Chinwendu Enyioha and Ali Jadbabaie and George J. Pappas, "Optimal Vaccine Allocation to Control Epidemic Outbreaks in Arbitrary Networks," *CoRR*, abs/1303.3984, 2013.
- [18] A. Ganesh and L. Massoulie and D. Towsley, "The effect of network topology on the spread of epidemics," *Proceedings IEEE 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, Vol. 2, pp.1455-1466, 2005.
- [19] Stephen P. Boyd and Seung Jean Kim and Lieven Vandenberghe and A. Hassibi, "A Tutorial on Geometric Programming," 2004.
- [20] Boyd, Stephen and Vandenberghe, Lieven, "Convex Optimization," Cambridge University Press, 2004.
- [21] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 2, pp. 308-322, 2009.

- [22] M. Ogura and C. F. Martin, "Stability analysis of linear systems subject to regenerative switchings," *Systems and Control Letters*, vol. 75, pp. 94-100, 2015.
- [23] L. Farina and S. Rinaldi, "Positive Linear Systems: Theory and Applications," Wiley-Interscience, 2000.
- [24] Chen, Xiaoming, Lam, James, Li, Ping and Shu, Zhan, " L_1 -induced norm and controller synthesis of positive systems," *Automatica*, Vol. 49, No. 5, pp. 1377-1385, 2013.
- [25] J. A. Tropp, "User-friendly tail bounds for sums of random matrices," *Foundations of Computational Mathematics*, Vol. 12, pp. 389-434, 2011.
- [26] B. Bollob, "Random Graphs," Cambridge University Press, 2001.
- [27] "空港一覧 - 国土交通省," http://www.mlit.go.jp/koku/15_bf_000310.html, 参照 2019-1-15.

発表リスト

- [1] 原田潤一, 小蔵正輝, "製品開発における資源配置の最適化手法の提案," 第 60 回自動制御連合講演会, 2017.
- [2] 原田潤一, 小蔵正輝, 岸田昌子, 杉本謙二, "設計プロジェクトにおける追加タスクの影響を最小化するためのロバスト最適化," 日本機械学会第 28 回設計工学・システム部門講演会, 2018.
- [3] 原田潤一, 小蔵正輝, 杉本謙二, "確率的に不確かなネットワークにおける最適資源配置," 第 6 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2019.
- [4] 小蔵正輝, 原田潤一, "非負システムの最適制御問題の対数凸性," 第 5 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, pp. Fr63-3, 2018.
- [5] M. Ogura, J. Harada, "Resource allocation for containing epidemics from temporal network data," 23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, pp. 537-542, 2018.