

NAIST-IS-MT1651010

修士論文

主成分分析の逆問題としてのマルチビュー学習問題

石谷 智之

2018 年 3 月 12 日

奈良先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報科学専攻

本論文は奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科に
修士（工学）授与の要件として提出した修士論文である。

石谷 智之

審査委員：

池田 和司 教授 （主指導教員）

杉本 謙二 教授 （副指導教官）

吉本 潤一郎 准教授 （副指導教官）

主成分分析の逆問題としてのマルチビュー学習問題*

石谷 智之

内容梗概

近年, 様々な分野で対象集合が複数の視点で異なる方式で観測されることによって得られるマルチビューデータに遭遇する. そのようなマルチビューデータから対象の性質を学習する枠組みとしてマルチビュー学習がある. マルチビュー学習は, 各視点における観測過程にそれぞれ 1 つの関数を対応させ, それらを同時に最適化することで対象の性質を学習する枠組みである. その中でも, 部分空間学習の枠組みでは, 全てのマルチビューデータは同一の潜在空間上に分布する対象集合から生成されるという仮定の下で, 対象の性質の学習を行っている. 部分空間学習では様々な研究が存在するが, 観測過程が対象集合に依存する際にそれを考慮した学習を行っているものが存在しなかった. 本研究では, 部分空間学習で行われている対象間の位置関係を保存した対象の推定の研究に関して, 観測過程が対象集合に依存しているもの, 特に観測過程が複数の対象集合の部分集合における主成分分析 (PCA) によって得られている場合に, 観測過程の対象集合への依存性を考慮することで, 考慮しない場合に比べて, 手法のより広い範囲の問題への適応, より高速, 高精度な対象の推定を目的とした推定手法の提案を行った. より具体的には, 主成分スコアがガウスノイズを加えて生成される状況を想定し, 観測過程における主成分分析の射影誤差最小化の性質, 列要素の正規直交性の性質, ならびに, 主成分スコア生成でのガウスノイズを考慮した最尤推定の 3 つの性質に着目して対象を推定する手法を提案した. その上で, 観測過程の対象集合への依存性を考慮することにより, 手法の適用可能な問題の範囲の拡大, 推定速度, 推定精度の向上が起こるかを検証するために, 主成分分析の射影誤差最小化を利用せず, 主成分分析の性質を考慮しない比較手法を設定した上で, いくつかの条件で複数回主成分スコアを生成し, 提案手法, 比較手法の収束率, 反復回数, 推定精度を比較する数値実験を行った. 数値実

* 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 情報科学専攻 修士論文, NAIST-IS-MT1651010, 2018 年 3 月 12 日.

験の結果, 観測過程に主成分分析の性質を考慮した提案手法は考慮しない比較手法と比べて, 広範囲の問題への対処, より高速で高精度な対象の推定が可能であることが分かった.

キーワード

マルチビュー学習, 部分空間学習, 主成分分析 (PCA)

Inverse principle component analysis: An approach to multi-view representation learning*

Tomoyuki Ishitani

Abstract

In recent years, in various research area, we find multiview data, those are obtained from observations through different views, in various fields. Multiview learning is one of frameworks for learning features of such multiview data. Multiview learning introduces one function to model an observation process on a view and learns features of objects by jointly optimizing all the functions. The subspace learning, one of frameworks of Multiview learning, learns feature of objects by assuming that the input views are generated from a latent space shared by multiple views. In subspace learning, even though there are various methods, those methods do not assume the procedure of observation is dependent of objects. In this research, we focus on the research that aims to obtain the location between objects while keeping the distance between them and assume the case that observation process is generated by Principal Component Analysis(PCA) on some subsets of datasets. Then, under considering the dependency of objects in procedure of observation, we develop a method which can be applied to some problems to which the method that does not assume the dependency of objects in procedure can not be applied and can estimate objects faster and more accurately than that method. More to say, under considering the PCA scores are generated from subsets of objects in each view by conducting PCA and adding gaussian noise, we develop a method by focusing on the 3 features of the observation process: the projection minimization error feature of PCA in the subset of each views, the row vector set of the observation

*Master's Thesis, Department of Information Science, Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology, NAIST-IS-MT1651010, March 12, 2018.

process as orthogonal system and maximum likelihood estimation by assuming gaussian noise. For verifying that our method can be applied to some problems to which the method that does not assume the dependency of objects and can estimate objects faster and more accurately than that method, we assume a comparative method which is developed by just focusing the row vector set of the observation process as orthogonal system and maximum likelihood estimation by assuming gaussian noise. Then, we generated PCA scores in some cases and did some experiment in which we compared the converge rate, the number of iteration and the accuracy of prediction between our method and the comparative method. As the result of the experiment, we find our method can be applied to some problems to which the method that does not assume the dependency of objects and can estimate objects faster and more accurately than that method.

Keywords:

Multiview learning, subspace learning, Principal Component Analysis(PCA)

目次

図目次	vi
第 1 章 はじめに	1
第 2 章 問題設定	4
2.1 主成分分析 (PCA)	6
2.2 観測過程	10
2.3 推定問題	11
第 3 章 推定手法	12
3.1 提案手法	13
3.2 比較手法	17
第 4 章 実験	20
4.1 データセット	20
4.2 収束率, 反復回数, 推定誤差	21
4.3 提案手法, 比較手法間の収束率, 反復回数の比較	22
4.4 推定精度比較	23
第 5 章 結論	26
謝辞	28
参考文献	29
付録 A	31
A.1 閾値設定条件に関する推定精度への影響の検証	31
A.2 提案手法, 比較手法間のアルゴリズムの収束率, 反復回数	35
A.3 提案手法, 比較手法での対象の推定精度比較	44

図目次

1.1	マルチビューデータの例	1
2.1	問題設定	5
4.1	主成分スコア生成の条件の変化における推定誤差の推移	25
A.1	提案手法, 比較手法の推測誤差への影響	32
A.2	主成分スコア生成の条件の変化における推定誤差の推移 (閾値を定 めない場合)	34
A.3	提案手法, 比較手法, それぞれによる対象の推定精度	60

第 1 章 はじめに

近年, 画像処理や知的システム研究分野などの様々な分野におけるデータ分析において, 我々は同じ対象が異なる領域で収集されたデータ, 異なる特徴抽出を受けたデータなどのマルチビューデータに遭遇する. マルチビューデータの例としては, 対象が複数の研究領域にまたがって利用され, それぞれ異なるフォーマットで変換されたデータ, 3 次元空間上の構造物を複数の撮影者がそれぞれ異なる位置, 方向, 焦点で撮影した写真などが挙げられる.

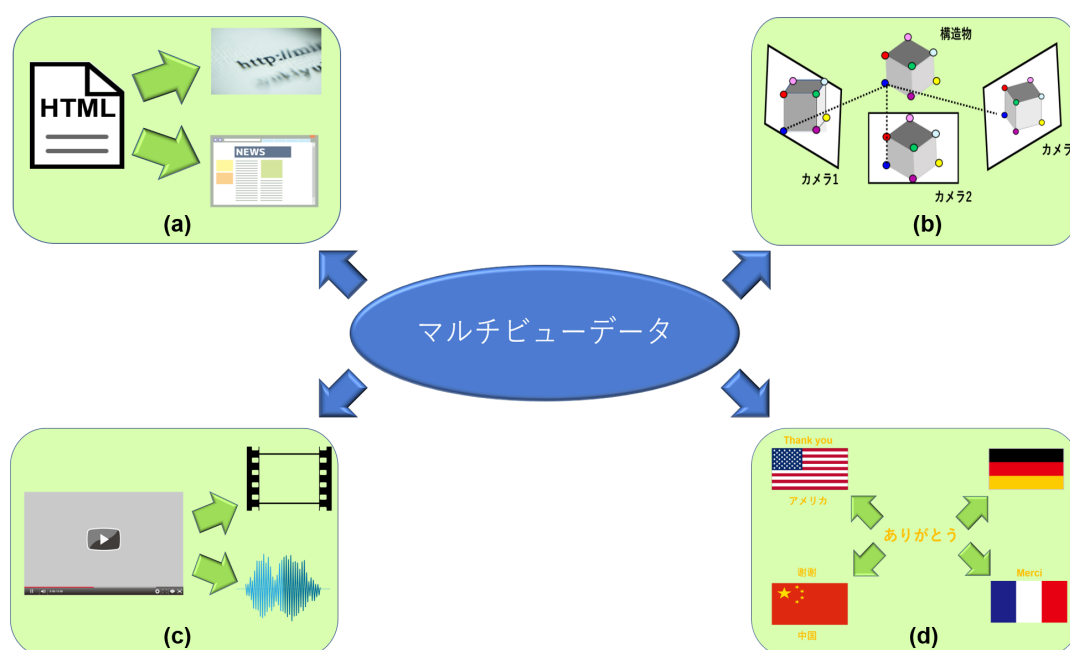


図 1.1 マルチビューデータの例: a) ウェブドキュメントは, ページの URL とページの文章で表現できる, b) 3 次元空間上の構造物は, 複数の撮影者によって異なる条件で撮影された写真として表現できる, c) 動画は, 映像情報と音で表現できる, d) 文章は, 様々な言語で表現できる.

サポートベクターマシン, 判別分析, カーネルマシン, スペクトルクラスタリングなどの従来の機械学習のアルゴリズムを用いてマルチビューデータを用いた学習を行うには, 各視点におけるマルチビューデータを 1 つに統合して, シングルビューデータに変換する必要がある [1]. しかしながら, そのような学習における複数の異

なる視点のデータ同士の結合は、それぞれのデータの統計的性質を無視することにより起因する対象の性質の不正確な推定、不明瞭な分析結果の解釈や、小さいサイズの学習データを用いる場合における過学習の問題などを引き起こす恐れがある。マルチビュー学習は、そのような問題に対処するための機械学習の新しいパラダイムである。マルチビュー学習は、各々の視点における対象の変換に 1 つの関数を導入し、それらの関数の同時最適化を行うことで対象の性質を学習する枠組みである。マルチビュー学習では、同一の対象に付随する豊富な視点の統計的性質を含めた情報を十分に活かし、学習のパフォーマンスや正確性を向上させることでシングルビュー学習で発生する上記の問題に対処している。

マルチビュー学習の中でも、部分空間学習 ([2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]) は、各視点でのマルチビューデータは同一の潜在空間を共有し、潜在空間上に分布する対象から生成されるという仮定の基で、それらのマルチビューデータを用いて潜在空間上に分布する対象の位置関係の情報などを学習することを目的とした枠組みである。部分空間学習によって得られた潜在空間上の対象についての情報は、分類問題やクラスタリングなどに利用されている。

部分空間学習の中には、マルチビューデータを埋め込みなどにより潜在空間に写像することで、対象間の距離情報を保存するように潜在空間上の対象集合を推定する枠組みが存在する。その枠組みの中には、行列分解によって予測対象集合を得る枠組み (潜在空間上に予測対象集合を配置する、画像処理の分野における 2 次元画像からの対象の 3 次元立体構造の復元 ([9],[10],[11], [12]), 推薦システムにおける顧客の情報の復元, ならびに、それらを用いた評価の予測 ([13],[14]), 低ランク行列分解の性質を検証する枠組み ([5], [15],[16])), 知的システム研究分野などでの、異なるメディア間で得られたマルチビューデータから得られた予測対象集合を用いた検索タスクにおける枠組み ([2],[3],[4]) などが存在する。

部分空間学習の対象間の距離情報を保存するように潜在空間上の対象集合を推定する枠組みでは、画像処理の分野など [12] で、カメラの射影モデルのように、各視点におけるマルチビューデータの観測過程を考慮した手法が存在するが、観測過程が対象集合に依存することを考慮に入れた手法は見られなかった。

本研究では、部分空間学習で行われている対象間の位置関係を保存した対象の推定の研究に関して、観測過程が対象集合に依存しているもの、特に観測過程が複数の

対象集合の部分集合における主成分分析 (PCA) によって得られている場合に、観測過程の対象集合への依存を考慮することで、考慮しない場合に比べて、手法のより広い範囲の問題への適応、より高速、高精度な対象の推定を目的とした推定手法の提案を行った。より具体的には、主成分スコアがガウスノイズを加えて生成される状況を想定し、観測過程における主成分分析の射影誤差最小化の性質、列要素の正規直交性の性質、ならびに、主成分スコア生成でのガウスノイズを考慮した最尤推定の3つの性質に着目して対象を推定する手法を提案した。その上で、観測過程の対象集合への依存性を考慮することにより、手法の適用可能な問題の範囲の拡大、推定速度、推定精度の向上が起こるかを検証するために、主成分分析の射影誤差最小化を利用せず、主成分分析の性質を考慮しない比較手法を設定した上で、いくつかの条件で複数回主成分スコアを生成し、提案手法、比較手法双方で、それらを用いて対象を推定する数値実験を行った。

以下では、第2章において、本研究の問題設定について述べる。第3章では、対象集合を推定する手法として、観測過程に主成分分析の性質を考慮した提案手法と考慮しない比較手法について述べる。第4章では、いくつかの条件の下で主成分スコア集合を生成し、それらの各条件において、提案手法と比較手法の収束率、反復回数、推定精度を比較するために行った数値実験の結果を示す。第5章では、結果についての考察を行う。

第 2 章 問題設定

マルチビュー学習の枠組みでは、視点 $p = 1, \dots, P$ のそれぞれに 1 つの関数 (観測過程) が割り当てられ、各視点において、対象集合に属する対象が観測過程によって写像され、マルチビューデータが生成されていることが想定されている [1].

本研究では、観測過程を $f^{(p)}$ 、対象集合を $\mathcal{X}$ 、対象を $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} (i = 1, \dots, I)$ とした上で、対象 $\mathbf{x}_i$ が関数 $f^{(p)}$ によって写像された後に観測ノイズ $\boldsymbol{\xi}_i^{(p)}$ が加わることで、マルチビューデータが生成されているとして、マルチビューデータ $\mathbf{y}_i^{(p)}$ を

$$\mathbf{y}_i^{(p)} = f^{(p)}(\mathbf{x}_i) + \boldsymbol{\xi}_i^{(p)} \quad (2.1)$$

というように表現する.

本研究では、観測過程が対象集合 $\mathcal{X}$ に依存する観測過程 $f_{\mathcal{X}}^{(p)}$ の内、特に観測過程が異なる視点間で同じ対象を含むことを許した上で抽出された部分集合における PCA によって得られている場合を考える. その上で、対象を (2.1) の観測過程を PCA による射影平面 $f_{\mathcal{X}}^{(p)} = \mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ としたもので変換されることで得られるマルチビューデータとしての PCA スコアが得られている状況を想定し. そのような PCA スコアからの対象の推定を行う (図 2.1).

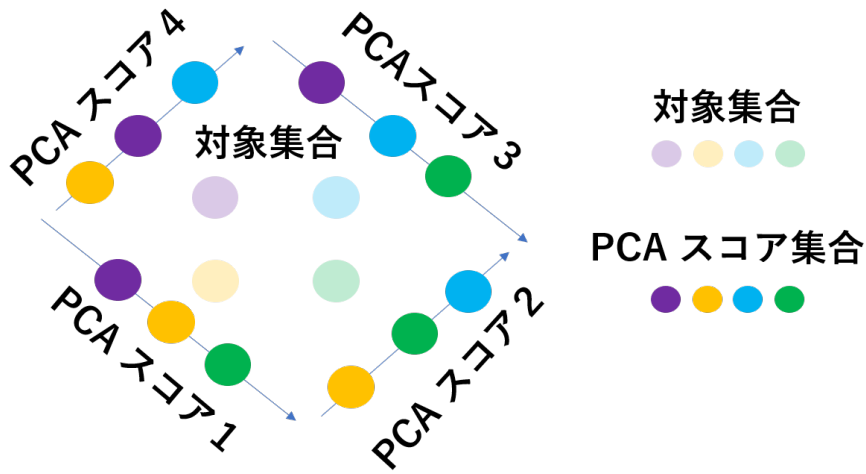


図 2.1 問題設定: 本研究では, マルチビューデータとして, 対象集合の部分集合から生成された PCA スコアが得られている場合を想定する. (図では, それぞれ 3 つの対象を含む部分集合ごとに PCA を行って PCA スコアが得られている場合を想定). その上で, それらの PCA スコア集合を用いて対象集合を推定する

この章では, まず, [18] で提唱された PCA の射影誤差最小化による定式化について触れた上で, マルチビューデータ. 即ち, PCA スコアの観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{x})$ とガウスノイズによる生成について述べる. その後, PCA スコアが得られている状況下において, 観測過程における [18] で提唱された PCA の射影誤差最小化の性質, 行ベクトルの集合が正規直交系であるという性質, 観測ノイズがガウスノイズであることを考慮した最尤推定の 3 つの性質を用いた推定問題について述べる.

本研究では, 基本的にスカラー, ベクトル, 行列は, 実数空間上に分布しているもののみを考慮し, 表記として, スカラーは斜体の小文字を, ベクトルは斜体の小文字の太字を, 行列は斜体の大文字の太字を, 集合はカリグラフィーの大文字の太字を用いる. また, 対象集合は, D 次元実数空間の部分集合 $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^D$ であるとする.

2.1 主成分分析 (PCA)

主成分分析 (PCA: principal component analysis) は, 次元削減, データ圧縮, 特徴抽出, データの可視化などに分野を問わず広く利用されている手法である. 対象集合 $\mathcal{X}$ での標本平均 $\bar{\mathbf{x}}$ を

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mathbf{x}_i \quad (2.2)$$

とおく. これ以降, 対象集合 $\mathcal{X}$ の各要素 $\mathbf{x}_i (i = 1, \dots, I)$ の標本平均は原点と一致する, 即ち, $\bar{\mathbf{x}} = 0$ であると仮定する.

一般的に, PCA による対象の次元削減では, 対象集合における標本分散共分散行列 $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^I \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (2.3)$$

の固有値分解を行い, 大きい順に並べた固有値 $\{\lambda_m \in \mathbb{R} | m = 1, \dots, D\}$ に対応する大きさが 1 の主成分ベクトルと呼ばれる固有ベクトル $\{\mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^D | d = 1, \dots, D\}$ を求める. ここで, $\{\mathbf{u}_d | d = 1, \dots, M\}$ を行ベクトルとして持つような行列を $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M \times D}$ とする. その上で, 大きい順に M 個の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ に対応する固有ベクトルによって張られる主部分空間と呼ばれる M 次元の低次元の部分空間上へ, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M$ を用いて正射影を行い, 各対象 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^D$ を

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{d=1}^M (\mathbf{x}_i^T \mathbf{u}_d) \mathbf{u}_d = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x}_i \quad (2.4)$$

のように変換する.

上記の対象集合の分散共分散行列の固有値問題として PCA を定式化する方法には, 2 つの異なる一般的な方法が存在する. 1 つは, 主部分空間上への正射影により射影された対象の分散を最大化するというものである [17]. もう一つは, 対象と正射影による近似表現の間の二乗誤差を最小化するというものである [18]. 以下では, 後者の定式化について述べる.

ここで, $\{\mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^D | d = 1, \dots, D\}$ を単に D 次元空間の正規直交系, 即ち, $\forall \mathbf{u}_d$

について, $o = 1, \dots, D$ に対して,

$$\mathbf{u}_o^\top \mathbf{u}_d = \delta_{od} \quad (2.5)$$

が成り立つ系であるとする. この時, 各対象 $\mathbf{x}_i$ は, $\{\mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^D | d = 1, \dots, D\}$ への正射影によって,

$$\mathbf{x}_i = \sum_{d=1}^D (\mathbf{x}_i^\top \mathbf{u}_d) \mathbf{u}_d \quad (2.6)$$

と表現できる.

ここで, 各対象 $\mathbf{x}_i$ の近似表現 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ を

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{d=1}^M z_{id} \mathbf{u}_d \quad (2.7)$$

とおく. ここで, $\{z_{id} \in \mathbb{R} | i = 1, \dots, I, d = 1, \dots, M\}$ であるとする. 誤差最小化による定式化では, 主成分ベクトル集合として, 対象 (2.6) とその近似値 (2.7) の間の

$$J = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \|\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i\|^2 \quad (2.8)$$

で定義される 2 乗距離 J を最小化するような正規直交系 $\{\mathbf{u}_d\}$ を $\{z_{id}\}$ との同時最適化により求める. ここで, (2.7) の $\tilde{\mathbf{x}}_i$ を (2.8) に代入し, z_{id} についての微分を 0 とおくと,

$$z_{id} = \mathbf{x}_i^\top \mathbf{u}_d \quad (2.9)$$

を得る. ここで, $d = 1, \dots, M$ である.

ここで, $\{\mathbf{u}_d | d = M+1, \dots, D\}$ を行ベクトルとして持つような行列を $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{D-M \times D}$ とする. (2.7) の $\tilde{\mathbf{x}}_i$ に (2.9) の最適解を代入し, (2.6) の $\mathbf{x}_i$ との差をとると,

$$\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}} \mathbf{x}_i \quad (2.10)$$

を得る.

以上により, (2.10) を (2.8) に代入することで, 対象 $\mathbf{x}_i$ とその近似 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ の二乗誤差の和 J は,

$$J = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{x}_i \right\|^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left\| \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}} \mathbf{x}_i \right\|^2 = \text{Tr} \left\{ \bar{\mathbf{U}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T \right\} \quad (2.11)$$

となる.

この時, J を $\{\mathbf{u}_d | d = M+1, \dots, D\}$ について, その正規直交性を満たすように最小化するためには,

$$\text{Tr} \left\{ \bar{\mathbf{U}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T \right\} + \text{Tr} \left\{ \mathbf{\Lambda} \left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^T \right) \right\} \quad (2.12)$$

という最小化問題を解く必要がある. ここで, $(D-M) \times (D-M)$ 単位行列を $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(D-M) \times (D-M)}$, ラグランジュ乗数行列を $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{(D-M) \times (D-M)}$ とする.

この時, (2.12) の J を $\bar{\mathbf{U}}^T$ に関して微分し, $\mathbf{0}$ とおくと,

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{\Lambda} \quad (2.13)$$

を得る. ここで, 実対称行列である $\mathbf{\Lambda}$ の固有方程式は,

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi} \mathbf{L} \quad (2.14)$$

となる. ここで, ラグランジュ未定乗数行列 $\mathbf{\Lambda}$ は実対称行列であるため, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(D-M) \times (D-M)}$ は, 対角要素に左上から大きい順に $\mathbf{\Lambda}$ の固有値を並べた行列, $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{(D-M) \times (D-M)}$ は, それらの固有値に対応する固有ベクトルを列要素として持つ $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Psi}^T = \mathbf{I}$ ととなるような正規直交行列と見なせる. (2.13) の両辺に右から $\mathbf{\Psi}$ を掛けた上で, (2.14) を用いて式変形を行うと,

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{\Psi} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{L} \quad (2.15)$$

となる. ここで, $\tilde{\mathbf{U}}^T = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{\Psi}$ とおくと, (2.15) は,

$$\mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}}^T = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{L} \quad (2.16)$$

となり, (2.16) は $\mathbf{S}$ の固有方程式と見なせる.

$\mathbf{\Psi}$ が正規直交行列であることに着目すると, J は,

$$J = \text{Tr} \left\{ \bar{\mathbf{U}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T \right\} = \text{Tr} \left(\mathbf{\Psi}^T \bar{\mathbf{U}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{\Psi} \right) = \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{U}} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{U}}^T \right) = \text{Tr} (\mathbf{L}) \quad (2.17)$$

となる．よって, J は, 対角要素として $M + 1$ 番目に大きい固有値から大きい順に左上に並べた実対象行列 L を用いた時, 最小になる．よって, 主部分空間を定義する固有ベクトルは, 大きい順から M 個の固有値に対応した固有ベクトルとなることがわかる．

以上が, [18] で提唱された PCA の射影誤差最小化による定式化である．

2.2 観測過程

この節では、各視点において PCA により得られている観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ と観測ノイズとして、ガウスノイズ想定した上で、マルチビューデータがどのように生成されているのかを示す。

D 次元実数空間上に分布する対象集合 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^D | i = 1, \dots, I\}$ が与えられたとする。その上で、対象集合から P 個の相異なる部分集合が、異なる集合間で同一の対象を含むことを許した上で抽出されているとする。即ち、部分集合群 $\{\mathcal{X}_p | p = 1, \dots, P\}$ が存在し、各部分集合 $\mathcal{X}_p$ は、 $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j (i \neq j)$ かつ $\mathcal{X} = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{X}_p$ を満たすとする。

この時、各視点における観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ は、部分集合 $\mathcal{X}_p$ において、PCA を行うことで K 次元空間 ($K < D$) への射影平面

$$\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^{K \times D} \quad (2.18)$$

として得られているものとする。

その上で、第 p 視点における対象 $\mathbf{x}_i$ に対応するマルチビューデータとして PCA スコア $\mathbf{y}_i^{(p)} \in \mathbb{R}^K$ は、観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ とガウスノイズ $\boldsymbol{\xi}_i^{(p)} \stackrel{iid}{\sim} N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ によって以下のように生成されると仮定する。

$$\mathbf{y}_i^{(p)} = \mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\xi}_i^{(p)} \quad (2.19)$$

この時、 $\Omega_{i,p}$ を第 p 視点において対象 $\mathbf{x}_i$ が観測されていれば 1, そうでなければ 0 をとるような変数とすると、(2.19) により、各視点 p におけるマルチビューデータセットとしての PCA スコアセット $\mathcal{Y}_p = \{\mathbf{y}_i^{(p)} | i : \Omega_{i,p} = 1\}$, および、それらの全視点における集合である PCA スコア集合 $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_p | p = 1, \dots, P\}$ が得られる。

2.3 推定問題

本研究の目的は、全ての視点に渡ってのマルチビューデータの集合、即ち、PCA スコア集合を用いて、対象間の位置情報を保存するような潜在空間上に対象集合 $\mathcal{X}$ を推定することである。その為、推定問題では前節において生成された PCA スコア集合 $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_p | p = 1, \dots, P\}$ を用いて、潜在空間上の対象集合 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^D | i = 1, \dots, I\}$ の座標推定を行う。

ただし、対象集合 $\mathcal{X}$ の推定において、観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ と対象集合 $\mathcal{X}$ の最適化は、観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ と観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する以下の3つの性質を考慮した上で行われるものとする。

①射影誤差最小化

各視点 p における観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ の最適化は、部分集合 $\mathcal{X}_p$ における (2.11) の J に対応する目的関数を最小化するように行われる。

②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系

各視点 p における観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ の最適化は、 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})^T = \mathbf{I}$ を満たすように行われる。

③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定

全ての視点での観測過程 $\{\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X}) | p = 1, \dots, P\}$ と対象集合 $\mathcal{X}$ の最適化は、観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ を考慮した最尤推定によって行われる。

第 3 章 推定手法

本章では, 第 2 章で述べた推定問題, 即ち, 観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ と観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する 3 つの性質を考慮した PCA スコアセット集合 $\mathcal{Y}$ から対象集合 $\mathcal{X}$ の座標推定を行うために用いる, 観測過程の対象集合への依存性を考慮した提案手法と考慮しない比較手法について述べる. 本研究では, 対象集合の座標推定に用いる手法として, 各視点 p における観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ に関する①射影誤差最小化, ②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系, の 2 つの性質と, 観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定, の性質の 3 つの性質を組み合わせた行列分解を用いる. 本研究での行列分解は, 総じて以下のように表現できる.

対象集合の要素を順に列ベクトルとする対象行列を

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_I] \in \mathbb{R}^{D \times I} \quad (3.1)$$

各視点の観測過程 (射影平面) $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ を順に行結合した全視点射影平面を

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{W}^{(P)}(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{KP \times D} \quad (3.2)$$

$\mathbf{W}(\mathbf{X})$ に $\mathbf{X}$ を掛け合わせることによって得られた, 各視点での対象集合の主成分スコアによる行列を

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}(\mathbf{X})\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{KP \times I} \quad (3.3)$$

とする. この時, $\mathcal{P}_\Omega$ を行列のデータが観測されている箇所, 即ち, $\Omega_{i,p} = 1$ を満たすインデックス $\{i, p\}$ に対応する箇所のみを抽出する抽出演算子であるとする, 行列分解では, PCA スコアセット集合 $\mathcal{Y}$ を用いた対象集合 $\mathcal{X}$ の座標推定を, 主成分スコア行列 $\mathbf{Y}$ を

$$\mathcal{P}_\Omega(\mathbf{Y}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{W}(\mathbf{X})\mathbf{X}) \quad (3.4)$$

を満たすような全視点射影行列 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ へ分解することにより行う.

本節では, まず, 観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ が対象集合 $\mathcal{X}$ に依存する PCA の性質を考慮し, ①射影誤差最小化, ②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系, ③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の 3 つの性質を用いた行列分解を行う提案手法について述べる. その後, その比較手法として, 観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathcal{X})$ が対象集合 $\mathcal{X}$ に依存する PCA の性質を考慮せずに, ②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系, ③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の 2 つの性質のみを用いた行列分解について述べる.

3.1 提案手法

提案手法では, PCA の性質を考慮し, 各視点 p での観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ に関する ①射影誤差最小化, ②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系であるという 2 つの性質を用いた目的関数と, 観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する ③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の性質を用いた目的関数を設定し, 座標降下法により, 主成分スコア行列 $\mathbf{Y}$ を用いて, 前者の目的関数を用いて全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ の最適化を, 後者の関数を用いて対象行列 $\mathbf{X}$ の最適化を交互に行う行列分解により対象行列 $\mathbf{X}$ を推定する. 以下では, 2 つの目的関数の定義をした上で, それらを用いた座標降下法による全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の交互更新による対象行列 $\mathbf{X}$ の推定アルゴリズムについて述べる.

視点 $p = 1, \dots, P$ での射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ に関する ①射影誤差最小化, ②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系であるという 2 つの性質を用いた目的関数は, 観測過程 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ が対応する部分集合 $\mathcal{X}_p$ において, 誤差最小化の性質を持つ, 即ち, (2.11) の $\mathbf{J}$ に対応するものに, 射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ における正規直交性の制約を加えた以下の関数となる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\{i: \Omega_{i,p}=1\}} \left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{x}_i \right\|^2 \quad s.t. \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T = \mathbf{I} \\ &= \sum_{\{i: \Omega_{i,p}=1\}} \mathbb{E} \left[\left\| \mathbf{x}_i - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T \left(\mathbf{y}_i^{(p)} - \xi_i^{(p)} \right) \right\|^2 \right] \quad s.t. \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.5)$$

これに対し、観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の性質を用いた目的関数は、(2.19) の PCA スコア生成モデルで、PCA スコア生成にガウシアンノイズを考慮した最尤推定の目的関数である以下の残差二乗和関数となる。

$$\sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \left\| \mathbf{y}_i^{(p)} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{x}_i \right\|^2 \quad (3.6)$$

座標降下法を用いた対象行列 $\mathbf{X}$ の推定アルゴリズムでは、対象行列 $\mathbf{X}$ は、(3.6) を最小化するような最尤推定量として、全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ は (3.5) を最小化するような、射影誤差を最小化するものとして更新している

推定アルゴリズムでは、全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の初期値を正規乱数で生成した後、以下のステップを (3.6) の値が収束するまで繰り返すことで対象行列 $\mathbf{X}$ の推定を行う。

対象行列 $\mathbf{X}$ の更新

$\mathbf{W}(\mathbf{X})$ を固定した上で、各対象 $\mathbf{x}_i (i = 1, \dots, I)$ の (3.6) を最小化する最適解を算出し、その値を用いて $\mathbf{X}$ を更新する。

全体射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ の更新

$\mathbf{X}$ を固定した上で、各射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ の (3.5) を最小化するような最適解を算出し、その値を用いて $\mathbf{W}$ を更新する。

ここで、(3.5) の正規直交性の制約以外の部分は、

$$-2Tr \left(\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^{(p)\top} \right) + \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \left\| \mathbf{x}_i \right\|^2 + \left\| \mathbf{y}_i^{(p)} \right\|^2 + D\sigma^2 \quad (3.7)$$

と変形できるため、 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ の最適解は、以下の関数

$$F = Tr \left(\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^{(p)\top} \right) \quad s.t. \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^\top = \mathbf{I} \quad (3.8)$$

を最大化するものとなる。ここで、 $\sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^{(p)\top}$ について、特異値が非負となるように特異値分解を行った結果得られた非零特異値について、そ

れらに対応する左特異ベクトル, 右特異ベクトルを行要素として持つ行列をそれぞれ $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, さらに非零特異値を大きいものから順に対角要素とする特異値行列を $\mathbf{\Sigma}$ とおく. この時, 行列 $\mathbf{W}^{(p)}$ の最適解は, (3.8) を最大にするように以下のように算出される.

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) &= \arg \max_{\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T) \\
&= \arg \max_{\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{V}^T \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}) \\
&= \mathbf{U} \mathbf{V}^T
\end{aligned} \tag{3.9}$$

具体的な更新の手順は, 以下に述べるようになる.

Algorithm 1 提案手法による全射影行列 $W(X)$ と対象行列 X の交互推定

Require: アルゴリズムの実行回数 $MaxIter$, 対象の次元 D , PCA スコアの次元 M , 総視点数 F , 総データ数 I , PCA スコアセット集合 $\mathcal{Y}$, (3.6) の残差二乗和関数の閾値 $TheErr$, 収束判定回数上限 $Count$

```

count  $\leftarrow$  0
 $W(X) \leftarrow 0$ 
 $X \leftarrow 0$ 
for  $p = 1$  to  $P$  do
     $tmp \leftarrow orth(randn(D, D))$ 
    ▶  $randn(\alpha, \beta)$  は, 独立に生成された  $\alpha$  次元正規乱数を  $\beta$  個列結合した行列,
     $orth(\gamma)$  は, 行列  $\gamma$  が行ベクトルに対するシュミットの正規直交化法により変換された結果としての直交行列
     $W((p-1)M+1:pM, :) \leftarrow tmp(:, 1:M)^T$ 
end for
 $X \leftarrow randn(D, I)$ 
for  $m = 1$  to  $MaxIter$  do
    if  $m = 1$  then
         $ERR1 \leftarrow \sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \|y_i^{(p)} - W^{(p)}(X)x_i\|^2$ 
    end if
    for  $i = 1$  to  $I$  do
        for  $p = 1$  to  $P$  do
             $S_{ww} \leftarrow \sum_{\{p:\Omega_{i,p}=1\}} W^{(p)}(X)^T W^{(p)}(X)$ 
             $S_{wy} \leftarrow \sum_{\{p:\Omega_{i,p}=1\}} W^{(p)}(X)^T y_i^{(p)}$ 
            if  $\min(\text{eig}(S_{ww}(X))) > 10^{-8}$  then
                ▶  $\text{eig}(\delta)$  は, 行列  $\delta$  の固有値の集合
                 $x_i \leftarrow (S_{ww})^{-1} S_{wy}$ 
            else
                 $x_i \leftarrow (S_{ww} + 10^{-8}I)^{-1} S_{wy}$ 
            end if
        end for
    end for
     $ERR2 \leftarrow \sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \|y_i^{(p)} - W^{(p)}(X)x_i\|^2$ 
    if  $ERR1 - ERR2 < TheErr$  then
        count  $\leftarrow$  count + 1
        if count = Count then
            break;
        end if
    end if
     $ERR1 \leftarrow ERR2$ 
    for  $p = 1$  to  $P$  do
         $S_{yx} \leftarrow \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} y_i^{(p)} x_i^T$ 
        if  $\forall S_{yx}(m, d) \neq \text{Inf} \vee \text{NaN}$  then
             $[U, \Sigma, V] \leftarrow SVD(S_{yx})$ 
        else
            break;
        end if
         $W^{(p)} \leftarrow UV^T$ 
    end for
end for

```

3.2 比較手法

比較手法では、提案手法とは異なり、PCA の性質を考慮せず、各視点 p での射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ に関する②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系である性質と、観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の性質を用いて、(3.6) の残差二乗和関数に各射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ における正規直交性の制約を加えた目的関数を設定する。その上で、提案手法と同じく座標降下法により、PCA スコア行列 $\mathbf{Y}$ を用いて、目的関数を用いて全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の最適化を交互に行う行列分解により対象行列 $\mathbf{X}$ を推定する。以下では、目的関数の定義をした上で、それらを用いた座標降下法による全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の交互更新による対象行列 $\mathbf{X}$ の推定アルゴリズムについて述べる。

視点 $p = 1, \dots, P$ での射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ に関する②観測過程の行ベクトル集合が正規直交系であるという性質と観測ノイズ (ガウスノイズ) $\xi_i^{(p)}$ に関する③観測ノイズ (ガウスノイズ) を考慮した最尤推定の性質を用いた目的関数は、(3.6) の残差二乗和関数に各射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ における正規直交性の制約を加えた以下の関数となる。

$$\sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \left\| \mathbf{y}_i^{(p)} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{x}_i \right\|^2 \quad s.t. \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T = \mathbf{I} \quad (p = 1, \dots, P) \quad (3.10)$$

座標降下法を用いた対象行列 $\mathbf{X}$ の推定アルゴリズムでは、全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ は、(3.10) を近似的に最小化するような、射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ の正規直交性の制約付き最尤推定量の近似として更新している。

推定アルゴリズムでは、全射影平面 $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の初期値を正規乱数で生成した後、以下のステップを (3.6) の値が収束するまで繰り返すことで対象行列 $\mathbf{X}$ の推定を行う。

対象行列 $\mathbf{X}$ の更新

$\mathbf{W}(\mathbf{X})$ を固定した上で, 各対象 $\mathbf{x}_i (i = 1, \dots, I)$ の (3.6) における最適解を算出し, その値を用いて $\mathbf{X}$ を更新する.

全体射影平面 $\mathbf{W}$ の更新

$\mathbf{X}$ を固定した上で, 各射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) (p = 1, \dots, P)$ の (3.6) における最適解を算出する. その上で, $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ との差のフロベニウスノルムが最小となる行ベクトルが正規直交系となる行列 $\mathbf{R}^{(p)}$ *s.t.* $\mathbf{R}^{(p)} \mathbf{R}^{(p)\top} = \mathbf{I}$ を以下の関数

$$F = \left\| \mathbf{R}^{(p)\top} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^\top \right\|^2 \quad (3.11)$$

を最小にするように求める. ここで, 射影平面 $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ について, 特異値が非負となるように特異値分解を行った結果得られた非零特異値について, それらに対応する左特異ベクトル, 右特異ベクトルを行要素として持つ行列をそれぞれ $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, さらに非零特異値を大きいものから順に対角要素とする特異値行列を $\mathbf{\Sigma}$ とおく. この時, 行列 $\mathbf{R}^{(p)}$ は射影行列 $\mathbf{W}^{(p)}$ との間の差のフロベニウスノルムを最小にするように以下のように算出される.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(p)} &= \arg \min_{\mathbf{R}^{(p)} \in \mathbb{R}^{K \times D}} \left\| \mathbf{R}^{(p)\top} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^\top \right\|^2 \\ &= \arg \min_{\mathbf{R}^{(p)} \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^\top) + \text{Tr}(\mathbf{I}) - 2\text{Tr}(\mathbf{R}^{(p)\top} \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})) \\ &= \arg \max_{\mathbf{R}^{(p)} \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{R}^{(p)\top} \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})) \\ &= \arg \max_{\mathbf{R}^{(p)} \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{R}^{(p)\top} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\top) \\ &= \arg \max_{\mathbf{R}^{(p)} \in \mathbb{R}^{K \times D}} \text{Tr}(\mathbf{V}^\top \mathbf{R}^{(p)\top} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}) \\ &= \mathbf{U} \mathbf{V}^\top \end{aligned} \quad (3.12)$$

このように算出された $\mathbf{R}^{(p)}$ を $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ に代入することで $\mathbf{W}(\mathbf{X})$ を更新する.

具体的な更新の手順は, 以下に述べるようになる.

Algorithm 2 比較手法による全射影行列 $\mathbf{W}$ と対象行列 $\mathbf{X}$ の交互推定

Require: アルゴリズムの実行回数 $MaxIter$, 対象の次元 D , PCA スコアの次元 M , 総視点数 P , 総データ数 I , PCA スコアセット集合 $\mathcal{Y}$, (3.6) の残差二乗和関数の閾値 $TheErr$, 収束判定回数上限 $Count$

```

count  $\leftarrow 0$ 
 $\mathbf{W}(\mathbf{X}) \leftarrow \mathbf{0}$ 
 $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{0}$ 
for  $p = 1$  to  $P$  do
     $\mathbf{tmp} \leftarrow \text{orth}(\text{randn}(D, D))$ 
    ▶  $\text{randn}(\alpha, \beta)$  は, 独立に生成された  $\alpha$  次元正規乱数を  $\beta$  個列結合した行列,
     $\text{orth}(\gamma)$  は, 行列  $\gamma$  が行ベクトルに対するシュミットの正規直交化法により変換された結果としての直交行列
     $\mathbf{W}((p-1)M+1:pM, :) \leftarrow \mathbf{tmp}(:, 1:M)^T$ 
end for
 $\mathbf{X} \leftarrow \text{randn}(D, I)$ 
for  $m = 1$  to  $MaxIter$  do
    if  $m = 1$  then
         $ERR1 \leftarrow \sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \left\| \mathbf{y}_i^{(p)} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})\mathbf{x}_i \right\|^2$ 
    end if
    for  $i = 1$  to  $I$  do
        for  $p = 1$  to  $P$  do
             $\mathbf{S}_{ww} \leftarrow \sum_{\{p:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})$ 
             $\mathbf{S}_{wy} \leftarrow \sum_{\{p:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})^T \mathbf{y}_i^{(p)}$ 
            if  $\min(\text{eig}(\mathbf{S}_{ww}(\mathbf{X}))) > 10^{-8}$  then
                ▶  $\text{eig}(\delta)$  は, 行列  $\delta$  の固有値の集合
                 $\mathbf{x}_i \leftarrow (\mathbf{S}_{ww})^{-1} \mathbf{S}_{wy}$ 
            else
                 $\mathbf{x}_i \leftarrow (\mathbf{S}_{ww} + 10^{-8} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}_{wy}$ 
            end if
        end for
    end for
     $ERR2 \leftarrow \sum_{\{i,p\}:\Omega_{i,p}=1} \left\| \mathbf{y}_i^{(p)} - \mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X})\mathbf{x}_i \right\|^2$ 
    if  $ERR1 - ERR2 < TheErr$  then
        count  $\leftarrow count + 1$ 
        if count = Count then
            break;
        end if
    end if
     $ERR1 \leftarrow ERR2$ 
    for  $p = 1$  to  $P$  do
         $\mathbf{S}_{yx} \leftarrow \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{y}_i^{(p)} \mathbf{x}_i^T$ 
         $\mathbf{S}_{xx} \leftarrow \sum_{\{i:\Omega_{i,p}=1\}} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$ 
        if  $\min(\text{eig}(\mathbf{S}_{xx})) > 10^{-8}$  then
             $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \leftarrow \mathbf{S}_{yx} (\mathbf{S}_{xx})^{-1}$ 
        else
             $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \leftarrow \mathbf{S}_{yx} (\mathbf{S}_{xx} + 10^{-8} \mathbf{I})^{-1}$ 
        end if
         $[U, \Sigma, V] \leftarrow \text{SVD}(\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}))$ 
         $\mathbf{R}^{(p)} \leftarrow UV^T$ 
         $\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{X}) \leftarrow \mathbf{R}^{(p)}$ 
    end for
end for
end for

```

第 4 章 実験

本章では、観測過程が PCA によって得られている場合に、観測過程の対象集合への依存を考慮することにより、手法を適用できる問題の範囲の拡大、対象の推定速度、推定精度の向上が起こるかを検証するために行ったいくつかの数値実験の結果を示す。実験では、PCA スコアの生成条件に着目し、観測空間の次元を固定した上で、潜在空間の次元数、視点数、部分集合のサイズ、ガウスノイズのノイズパラメータを変化させ、各々の条件で既定の回数、PCA スコア集合の算出、それを用いた提案手法、比較手法での推定試行を行い、各手法ごとに収束率、推定精度を計算、反復回数を記録した。その上で、手法を適用できる問題の範囲への影響を調べるための数値実験として、提案手法と比較手法の収束率の間に割合の差の検定を、アルゴリズムの収束速度への影響を調べるために、提案手法と比較手法双方が収束する場合に限定して、全推定試行における両手法での反復回数を用いた Wilcoxon の順位和検定を、推定精度への影響を調べるために、収束速度の調査の場合と同じく、両手法が収束する場合に限定して、全推定試行における後述する推定誤差を用いた Wilcoxon の順位和検定をそれぞれ行った。その結果、観測過程の PCA の性質、対象集合への依存を考慮することにより、手法間で収束率、反復回数に有意差があるような任意の条件において、収束率、推定速度の向上が、また、両手法が収束するような場合が存在する任意の条件において、推定精度の向上が起こることが分かった。以下で詳細を記載する。

4.1 データセット

本研究では、データセット、即ち、PCA スコア集合 $\mathbf{Y}$ は、観測空間の次元数を 2 に固定した上で、潜在空間の次元数 $D \in \{3, 5, 7, 10\}$ 、サイズが $I = 50$ 、各対象は独立に標準正規分布に従うような対象集合 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^D \mid \mathbf{x}_i \stackrel{iid}{\sim} N(\mathbf{0}, \mathbf{I}), i = 1, \dots, I\}$ を用いて、潜在空間の次元数 D 、視点数 $P \in \{30, 50, 70, 100\}$ 、任意の部分集合における対象の観測率 $R \in \{0.3, 0.5\}$ 、ガウスノイズパラメータ $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ をそれぞれ変化させ、各条件 (D, P, R, σ^2) ごとに行われる 100 回の推定試行各々で生成されているとする。

4.2 収束率, 反復回数, 推定誤差

当節では, 提案手法と比較手法間の推定精度比較に用いる推定誤差の定義, 収束率, 推定誤差, 反復回数の算出と記録について述べる.

本研究での推定誤差の定義について述べる. 真の対象集合を $\mathcal{X}$, 各々の推定試行において生成された PCA スコアセット $\mathcal{Y}$ による予測対象集合を $\mathcal{X}^{pre}$ とおく. この時, 推定誤差は, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}^{pre}$ のユークリッド距離行列の差の上三角行列の絶対値の平均値

$$\frac{1}{2} \frac{1}{50 \times 50} \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{50} \left| [d(\mathcal{X}) - d(\mathcal{X}^{pre})]_{ij} \right| \quad (4.1)$$

(ここで, $d(-)$ はベクトル集合のユークリッド距離行列, $[-]_{ij}$ は行列の i, j 成分) として定義される.

続いて, 収束率, 推定誤差, 反復回数の算出と記録について述べる. 本研究では, 提案手法, 比較手法のパラメータ設定として, 手法の最大反復回数 $MaxIter = 1000$, 収束判定の閾値, 収束判定回数を $TheErr = 10^{-8}$, $Count = 5$ と設定した (閾値設定条件に関する推定精度への影響の検証については, 付録を参照). その上で, 各条件 (D, P, R, σ^2) での, 提案手法, 比較手法それぞれにおける 100 回の推定試行において, 各試行で 10 回の異なる初期値からの推定を行い, その内 (3.6) の値が最小になった場合において, その反復回数と収束判定回数に達したか否かの記録, 推定精度の算出を行った. そのようにして, 各条件 (D, P, R, σ^2) における提案手法, 比較手法の双方において, 100 回の推定試行それぞれにおける推定誤差, 反復回数, 100 回の推定試行の内, 収束判定回数に達した回数の割合である収束率を記録した.

4.3 提案手法, 比較手法間の収束率, 反復回数の比較

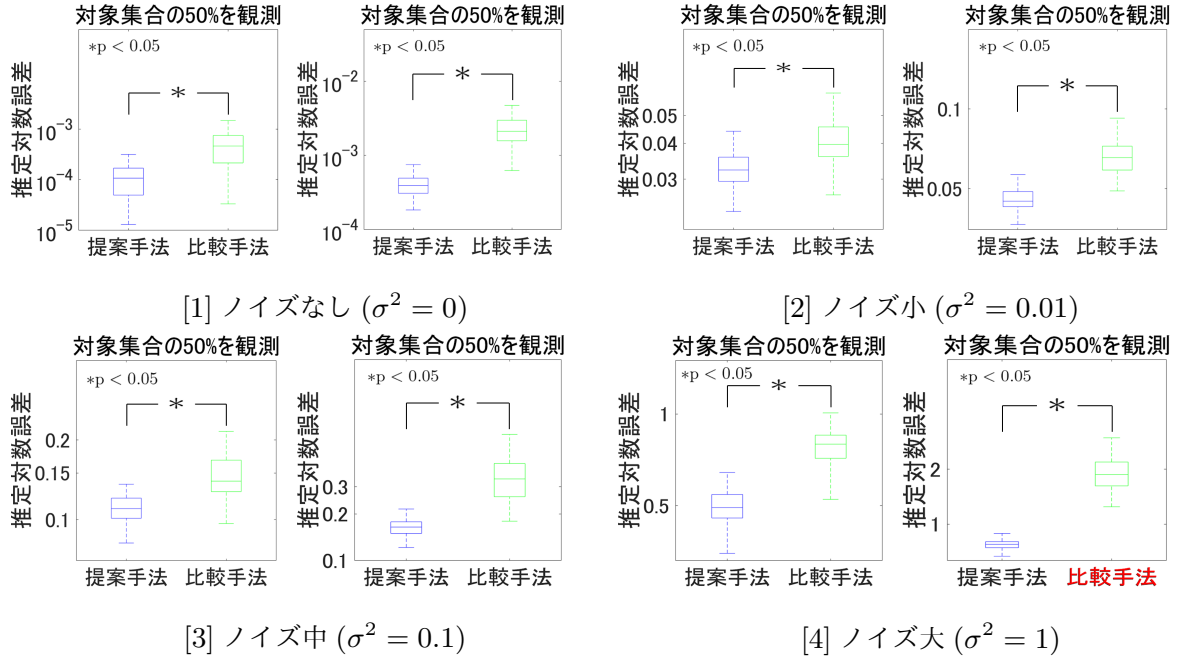
観測過程の対象集合への依存を考慮することによる, 手法を適用できる問題の範囲, アルゴリズムの収束速度への影響を調べるため, 各条件 (D, P, R, σ^2) ごとに, 提案手法と比較手法の収束率, 反復回数の比較を行った. 収束率の比較では, 有意水準 5% で提案手法, 比較手法の収束率についての割合の差の検定を, 反復回数の比較では, 有意水準 5% で, 推定試行の内, 提案手法, 比較手法の双方で収束判定回数に達した場合における両手法の反復回数の集合について, Wilcoxon の順位和検定による中央値の比較を行った (ただし, 提案手法, 比較手法の双方で収束判定回数に達した場合が存在しない条件では, 比較は行わなかった). その結果, (表 4.1) のように, 収束率, 反復回数に有意差のある任意の条件 (D, P, R, σ^2) において, 提案手法の収束率は比較手法のものに比べて有意に大きく, 反復回数の中央値は有意に少ないことが分かった (付録参照). また, 提案手法と比較手法の間の収束率の有意差は, 潜在空間と観測空間の次元数の差が大きく, 視点数や部分集合における対象の観測率が小さいような条件でよく観測された.

表 4.1 提案手法, 比較手法におけるアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

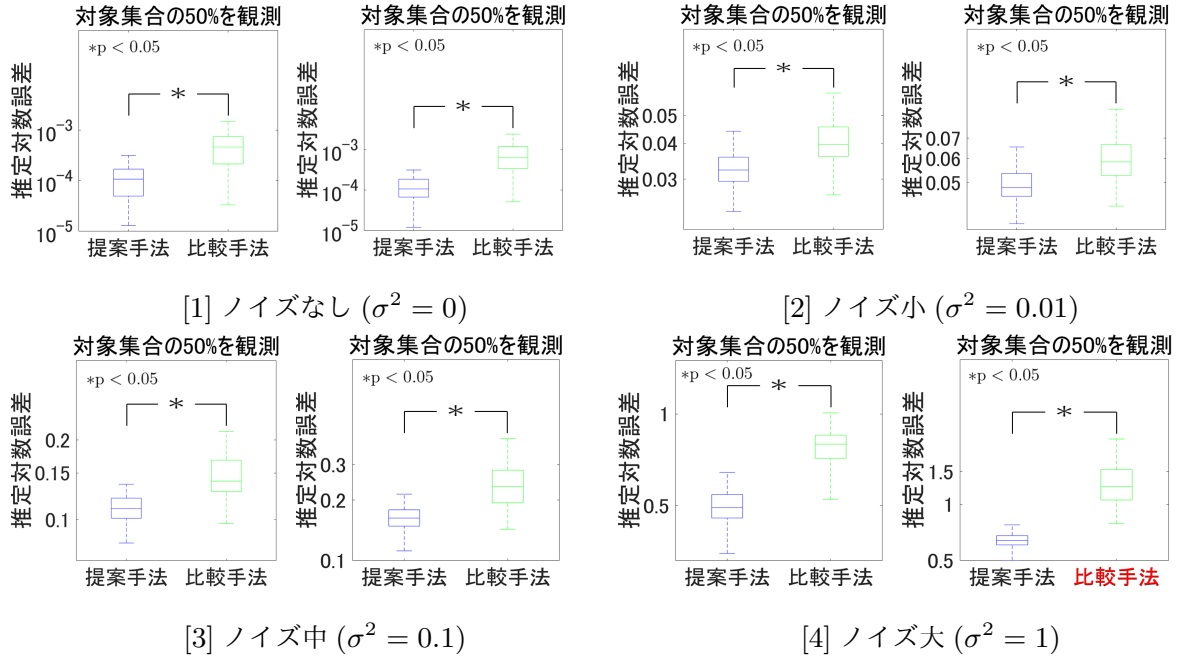
D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	17*	29
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	23*	35
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.99	0.99	28*	157
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.94*	0.72	115*	557.5

4.4 推定精度比較

観測過程の対象集合への依存を考慮することによる、対象の推定精度への影響を調べるために、各条件 (D, P, R, σ^2) ごとの提案手法と比較手法の推定誤差の同士の比較、ならびに、各手法の推定誤差と標準正規乱数によりランダムに対象を推定した場合の推定誤差の比較を行った。推定誤差の比較では、推定試行の内、提案手法、比較手法の双方で収束判定回数に達した場合における両手法の推定精度の集合を用いて、有意水準 5% で Wilcoxon の順位和検定による提案手法、比較手法の推定誤差の集合間の中央値の比較、ならびに、各手法の推定誤差の集合と標準正規乱数による推定誤差の集合間の中央値の比較を行った (ただし、提案手法、比較手法の双方で収束判定回数に達した場合が存在しない条件では、比較不能とし、比較は行わなかった)。提案手法と比較手法の推定精度の比較の結果、提案手法、比較手法の双方で収束判定回数に達した場合が存在する任意の条件 (D, P, R, σ^2) においては、提案手法の推定誤差の中央値は比較手法のものに比べて有意に小さいことが分かった (付録参照)。また、推定精度比較の結果を用いて、条件 (D, P, R, σ^2) について、潜在空間の次元数 D が変化し、潜在空間と観測空間の次元数 D の差が増大した場合 (図 4.1.(a)), 視点数 P が減少した場合 (図 4.1.(b)), 部分集合の対象の観測率 R が減少した場合 (図 4.1.(c)), ノイズパラメータ σ^2 が増大した場合 (図 4.1.(a), (b), (c)) などの推定条件の悪化における推定精度の変化の観察も行った。その結果、推定精度を悪化させるような条件の変化が起こった場合には、提案手法では推定誤差の集合の中央値が標準正規乱数による推定誤差の集合の中央値よりも有意に小さいままの場合でも、比較手法では推定誤差の中央値は標準正規乱数による推定誤差の集合の中央値よりも有意に小さいとはいえない、または、有意に大きくなってしまう場合が存在することが分かった。



(a) 潜在空間の次元が増大した場合



(b) 視点数が減少した場合

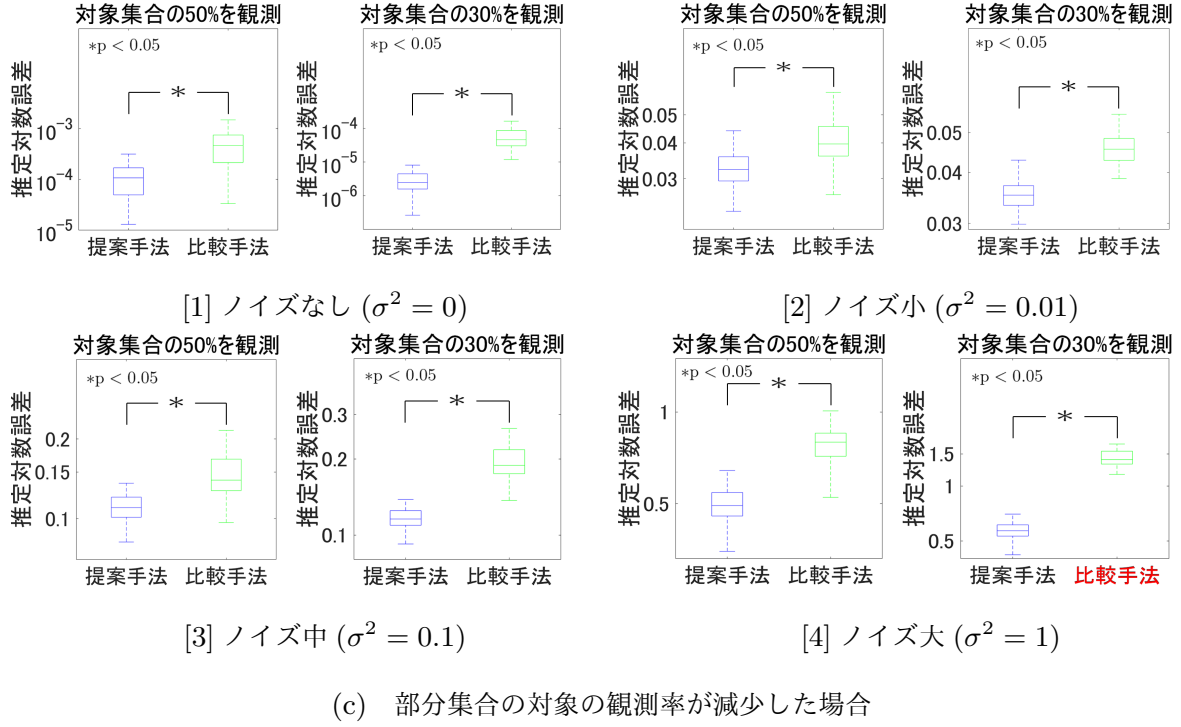


図 4.1 主成分スコア生成の条件の変化における推定誤差の推移: 各図では、左に潜在空間の次元数, 視点数, 部分集合における対象の観測率が ($D = 5, P = 100, R = 0.5$) である場合の, 各ノイズパラメータ $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ における提案手法, 比較手法の推定誤差, 右に, a) 潜在空間の次元が $D = 5$ から $D = 7$ に増大した場合, b) 視点数が $P = 100$ から $P = 50$ に減少した場合, c) 部分集合の観測率が 0.5 から 0.3 に減少した場合, の提案手法, 比較手法双方の推定誤差をそれぞれ示している. また, 箱ひげ図の手法のラベルの内, 赤い文字は, その条件における該当手法の推定精度の中央値と標準正規乱数による推定誤差の中央値の Wilcoxon の順位和検定による検定の結果, 有意水準 5% で推定誤差の中央値が等しいという帰無仮説を棄却できない, または, 有意に推定誤差が大きくなったことを示している.

第 5 章 結論

本研究では、部分空間学習の対象間の位置関係を保存した対象の推定について、観測過程が主成分分析によって得られた場合を想定し、観測過程の対象集合への依存性を考慮した提案手法と考慮しない比較手法の収束率、反復回数、推定精度の比較を行った。その結果、比較手法において対象の推定が出来ない場合でも、提案手法では、対象の推定を行うことが出来る場合が統計的に有意に多く発生することが判明した。また、反復回数、推定誤差の比較の結果から、提案手法と比較手法の双方で、対象の推定が可能な場合には、提案手法は比較手法に比べて統計的に有意に収束速度、推定精度が向上することが判明した。以上により、観測過程が主成分分析によって得られている場合には、観測過程の対象集合への依存性を考慮に入れた提案手法は、考慮しない場合と比べて、より広い範囲の問題に適用できること、また、対象集合への依存性を考慮に入れた提案手法と考慮しない手法の双方で対象の推定が可能な場合では、提案手法の方がより高速、高精度な対象の推定ができることが分かった。

上記の結果に加えて、いくつかの PCA スコア生成の条件、特に、潜在空間の次元数が大きく、視点数、部分集合における対象の観測率が少ないことにより、潜在空間と観測空間の次元数の乖離、観測データの不足、観測ノイズなどが顕著ないくつかの条件において、標準正規乱数による推定精度と比較して、比較手法の推定精度が統計的に有意に精度が違うと言えない、もしくは、精度が悪化する条件においても、提案手法における推定精度は有意に精度が高いままであった。このことから、観測過程が主成分分析によって得られている場合、観測過程の対象集合への依存性を考慮に入れた提案手法は、考慮しないものに比べて潜在空間と観測空間の次元数の乖離、観測データの不足、観測ノイズなどに対するロバスト性を持つ傾向があることが示唆された。また、閾値設定条件に関する推定精度への影響の検証の結果から、閾値を本研究で設定したものよりも小さくすることにより、観測ノイズがない場合では推定精度が向上する可能性はあるものの、その場合においても、対象集合への依存性を考慮に入れた提案手法と考慮しない手法の双方で対象の推定が可能な場合では、提案手法の方がより高精度な対象の推定が出来ること、潜在空間と観測空間の次元数の乖離、観測データの不足、観測ノイズなどに対するロバスト性を持つ傾向があることが同様に示唆された。

本研究では、マルチビュー学習、特に、部分空間学習の中の対象間の位置関係を保存するように対象を推定する枠組みにおいて、観測過程が対象集合に依存している場合、特に観測過程が複数の対象集合の部分集合における主成分分析 (PCA) によって得られている場合に、観測過程の対象集合への依存を考慮することで、考慮しない場合に比べて、手法のより広い範囲の問題への適応、より高速、高精度な対象の推定を目的とした推定手法の提案を行った。その上で、観測過程の対象集合への依存性を考慮に入れることで、手法が適用可能な問題の範囲の拡大、推定速度、推定精度の向上が起こるかを検証するために、観測過程の対象集合への依存を考慮しない比較手法を設定し、主成分スコアの生成におけるいくつかの条件において、提案手法と比較手法の収束率、反復回数、対象の推定精度の比較を行った。その結果、比較手法において対象の推定が出来ない場合でも、提案手法では、対象の推定を行うことが出来る場合が統計的に有意に多く発生すること、提案手法と比較手法の双方で、対象の推定が可能な場合には、提案手法は比較手法に比べて統計的に有意に収束速度、推定精度が向上することが判明した。その為、観測過程の対象集合への依存性を考慮した提案手法は考慮しない場合と比較して、より広い問題への適用が可能であり、対象集合への依存性を考慮に入れた提案手法と考慮しない場合の双方で対象の推定が可能な場合では、提案手法の方がより高速、高精度な対象の推定ができることが分かった。以上により、本研究は、部分空間学習、ひいては、マルチビュー学習の分野において、観測過程が対象集合に依存していることが想定できる場合に、そのことを考慮した推定手法を用いることで、学習の精度やアルゴリズムの収束率、収束速度が向上する可能性を示し、同分野の発展に寄与することが出来たと考える。

謝辞

本研究を行うにあたり、丁寧なご指導、ご教示を賜りました奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 池田 和司 教授に深く感謝いたします。研究室ゼミでのご助言、ご指摘はとても参考になりました。

研究発表の際、貴重なご意見を下さいました奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 杉本 謙二 教授に深く感謝いたします。研究発表の際にいただいたご意見はとても参考になりました。

奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 吉本 潤一郎 准教授に心より感謝いたします。研究の手法開発、ならびに、その Algorithm の実装に関しての大きな寄与、ならびに、度々の御助言と丁寧なご指導をしていただき厚くお礼申し上げます。

また、日頃より、共に研究生活を送り、時に議論にお付き合いいただいた数理情報学研究室の皆様にも心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] C.Xu, D.Tao and C.Xu. “A survey on multi-view learning.” arXiv preprint arXiv:1304.5634 (2013).
- [2] N.Quadrianto, C.Lampert. “Learning multi-view neighborhood preserving projections.” Proceedings of the 28 th International Conference on Machine Learning; Washington, USA (2011):425-432.
- [3] J.Yu, M.Wang, and D.Tao. “Semisupervised multiview distance metric learning for cartoon synthesis.” IEEE Transactions on Image Processing 21.11 (2012): 4636-4648.
- [4] D.Zhai, H.Chang, X.chen,W.Gao. “Multiview metric learning with global consistency and local smoothness.” ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST) 3.3 (2012): 53.
- [5] M.Salzmann, CH.Ek, R.Urtasun, T.Darrell. “Factorized orthogonal latent spaces.” Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. (2010).
- [6] H.Hotelling. “Relations between two sets of variates.” Biometrika 28.3/4 (1936): 321-377.
- [7] S.Akaho. “Kernel Canonical Correlation Analysis.” Proc. 3rd Workshop on Inductionbased Information Sciences (IBIS2000),(2000).
- [8] C.Fyfe, PL.Lai. “ICA using kernel canonical correlation analysis.”In Proc. Int. Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation,(2000).
- [9] C.Tomasi, T.Kanade. “Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method.” International Journal of Computer Vision 9.2 (1992): 137-154.
- [10] T.Okatani, K.Deguchi. “Yet another appearance-based method for pose estimation based on a linear model.” IAPR Workshop on Machine Vision Applications (2000): 258–261.

- [11] 玉木徹. “姿勢推定と回転行列” 電子情報通信学会技術研究報告. SIP, 信号処理 109.202 (2009): 59-64.
- [12] S.Agarwal, Y.Furukawa,N.Snavely,I.Simon. “Building rome in a day.” Communications of the ACM 54.10 (2011): 105-112.
- [13] R.Bell, Y.Koren, and C.Volinsky. “Modeling relationships at multiple scales to improve accuracy of large recommender systems.” Proceedings of the 13th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM (2008):95-104.
- [14] Y.Koren, R.Bell, and C.Volinsky. “Matrix factorization techniques for recommender systems.” Computer 42.8 (2009).
- [15] PV.Giampouras, AA.Rontogiannis, and KD.Koutroumbas. “Alternating Iteratively Reweighted Minimization Algorithms for Low-Rank Matrix Factorization.” arXiv preprint arXiv:1710.02004 (2017).
- [16] PV.Giampouras, AA.Rontogiannis, and KD.Koutroumbas. “l1/l2 regularized non-convex low-rank matrix factorization.” Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations (SPARS) (2017).
- [17] H.Hotelling. “Analysis of a complex of statistical variables into principal components.” Journal of educational psychology 24.6 (1933): 417.
- [18] K.Pearson. “LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space.” The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 2.11 (1901): 559-572.

付録 A

A.1 閾値設定条件に関する推定精度への影響の検証

以下では、第 4 章で設定した提案手法と比較手法の更新終了の閾値として設定した $TheErr = 10^{-8}$ に関して、この条件が推定精度に与える影響を検証した。検証では、まず、潜在空間の次元数、視点数、部分集合における観測率を ($D = 5, P = 100, R = 30$) とした上で、観測ノイズパラメータ $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ を変化させた各条件 (D, P, R, σ^2) において、各手法のごとで、閾値を本研究の条件で設定した場合の推定誤差と閾値を定めず最大反復回数 $MaxIter$ まで更新を行い、推定試行の内、提案手法、比較手法の双方で収束判定回数の条件を満たした場合の推定誤差を比較する実験を行った。比較では、両手法の推定誤差の集合を用いて、有意水準 5% で Wilcoxon の順位和検定による提案手法、比較手法それぞれの閾値で更新を終了した場合と最大反復回数まで更新を続けた場合の推定誤差の集合間の中央値の比較を行った。その結果、(図 A.1) にあるように、ノイズがない場合を除いた設定した任意の大きさのノイズが加わった場合において、提案手法、比較手法の双方で、閾値で更新を終了した場合の推定誤差の集合の中央値と最大反復回数まで更新を続けた場合の集合の中央値の間に差があるとはいえないことが図の例により示された。また、上記の各手法での、主成分スコア生成の各条件 (D, P, R, σ^2) における閾値による推定誤差への影響を調査する実験に加え、潜在空間と観測空間の次元数の差が大きくなる、視点数、部分集合の観測率が減少するといった条件の悪化に対する各手法のロバスト性へ設定した閾値の条件が及ぼす影響を検証するために、最大更新回数まで両手法を更新し続けた場合における、4 章で行ったものと同様の、潜在空間の次元数 D の増大、視点数 P 、部分集合の観測率 R の減少に対する両手法の推定誤差の変化を比較する実験を行った。実験の結果、(図 A.2) にあるように最大反復回数まで更新を行った場合でも、本研究のように、閾値で更新を止めた場合と同様、推定精度を悪化させるような条件の変化が起こった場合には、提案手法では推定誤差の集合の中央値が標準正規乱数による推定誤差の集合の中央値よりも有意に小さいままの場合でも、比較手法では推定誤差の中央値は標準正規乱数による推定誤差の集合の中央値よりも有意に小さいとはいえない、または、有意に大きくなってしまう場合が存在すること、設定した任意の条件において、提案手法の推定誤差の集合の

中央値よりも、比較手法の誤差の中央値が有意に小さくなることが分かった。以上により、閾値設定条件に関する推定精度への影響に関しては、提案手法と比較手法の更新終了の閾値条件 $TheErr$ を本研究のものよりも小さく設定し、より多くの更新を行うことで、観測ノイズがない場合には推定精度の更なる向上の余地があると考えられる一方で、本研究で議論していた観測過程に対象集合の依存を考慮した提案手法と比較手法の推定精度の比較、主成分スコア生成の条件の悪化に対する提案手法と比較手法のロバスト性などの推定精度の検証の結果には影響を及ぼさないことが分かった。

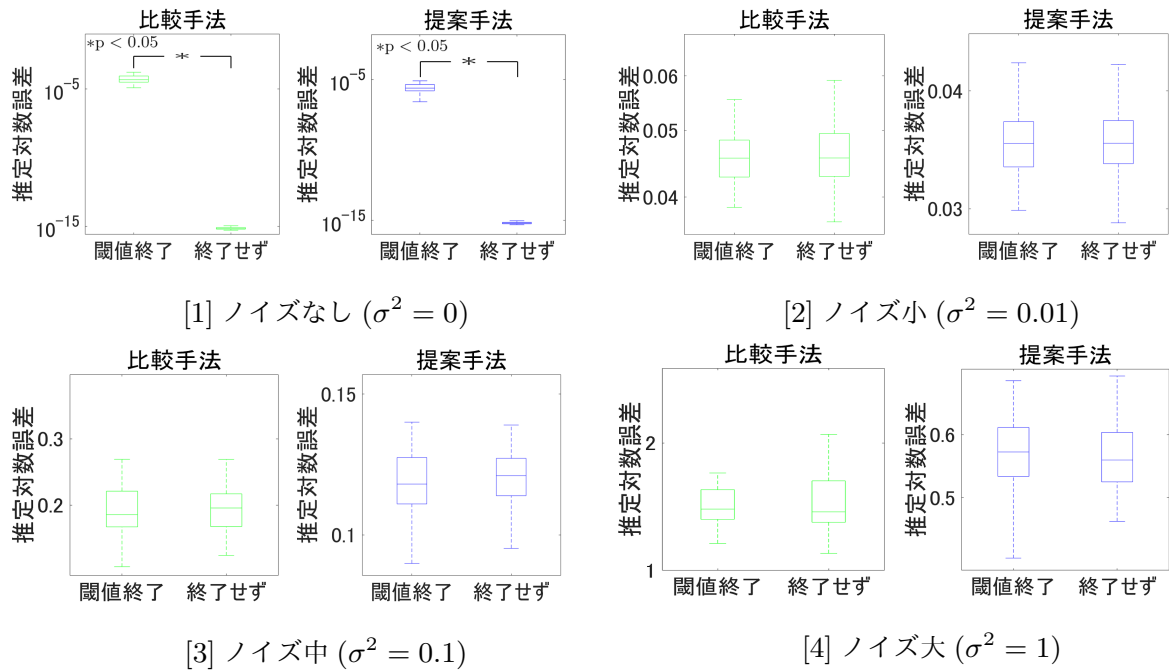
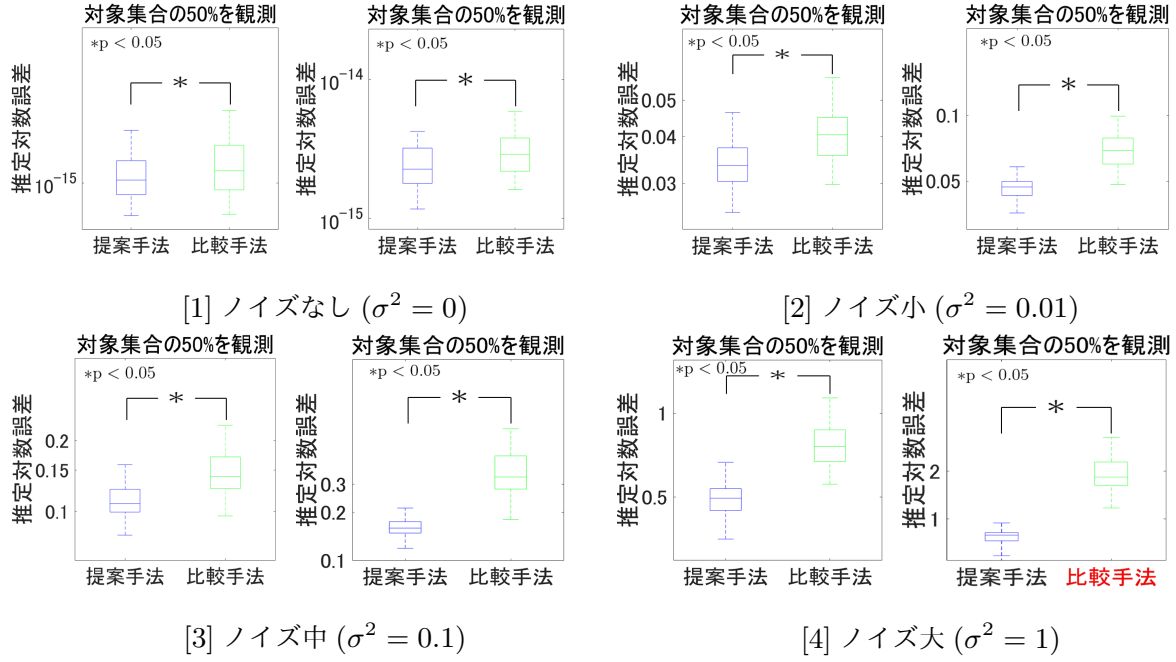
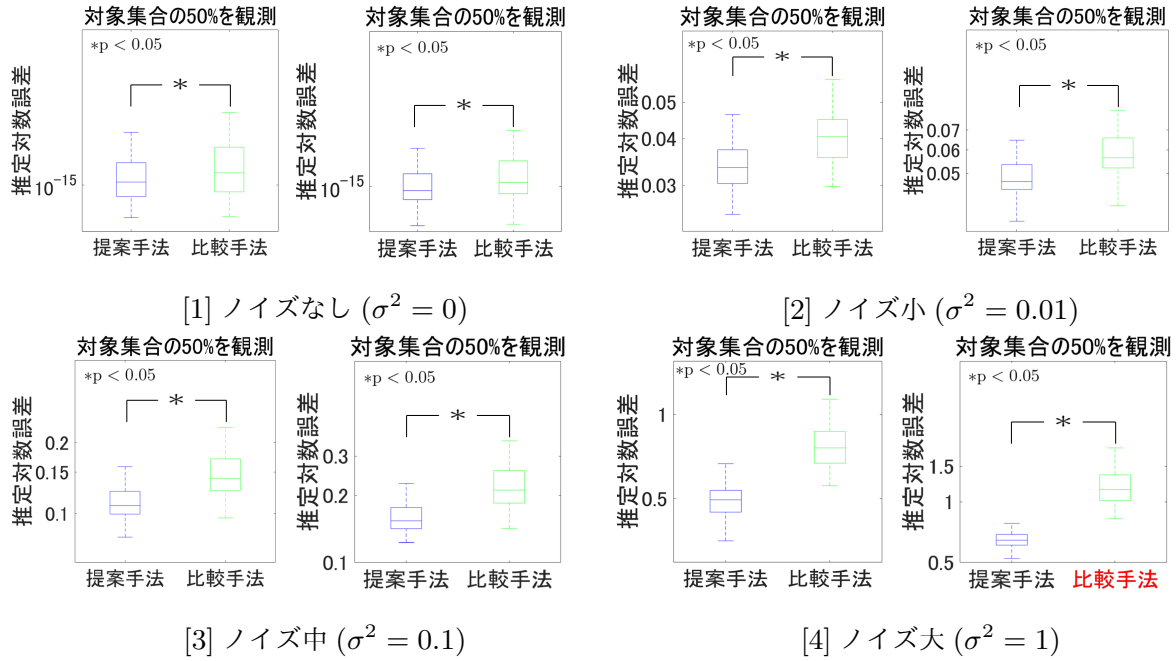


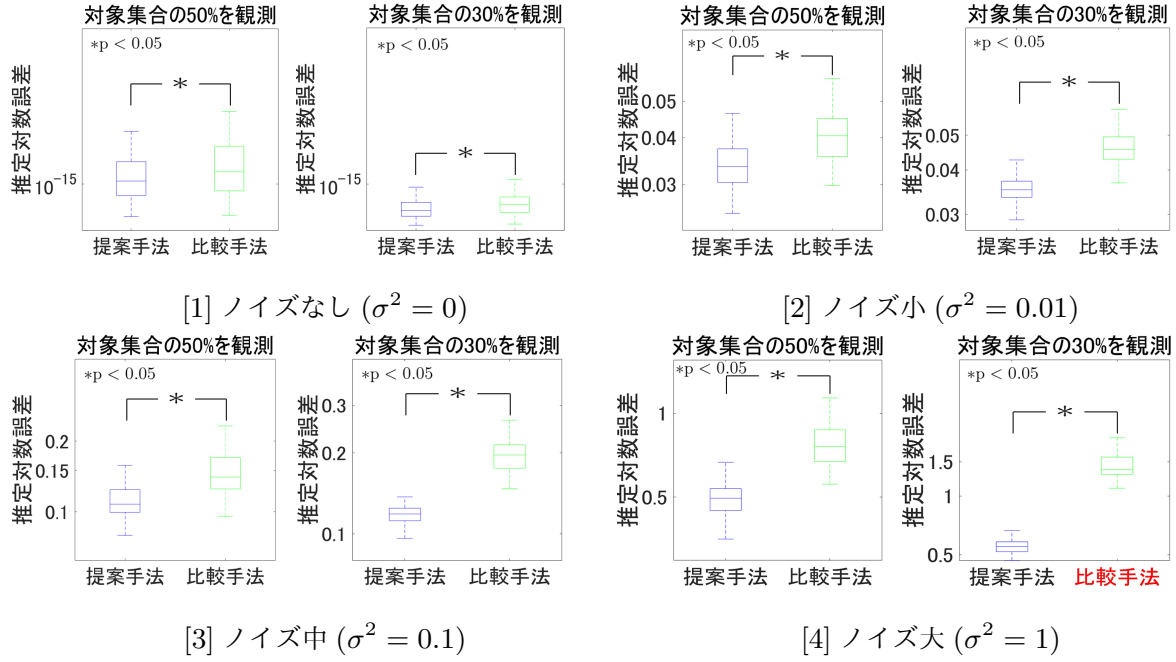
図 A.1 提案手法, 比較手法の推定誤差への影響: 潜在空間の次元数, 視点数, 部分空間における対象の観測率が $D = 5, P = 100, R = 30$ である場合の, 各ノイズパラメータ $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ における, 提案手法, 比較手法それぞれにおいての, 閾値で更新を止めた場合と, 更新を最大反復回数まで行った場合の比較の結果を示している。



(a) 潜在空間の次元が増大した場合



(b) 視点数が減少した場合



(c) 部分集合の対象の観測率が減少した場合

図 A.2 主成分スコア生成の条件の変化における推定誤差の推移 (閾値を定めない場合): 各図では, 左に潜在空間の次元数, 視点数, 部分集合における対象の観測率が ($D = 5, P = 100, R = 0.5$) である場合の, 各ノイズパラメータ $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ における提案手法, 比較手法の推定誤差, 右に, a) 潜在空間の次元が $D = 5$ から $D = 7$ に増大した場合, b) 視点数が $P = 100$ から $P = 50$ に減少した場合, c) 部分集合の観測率が 0.5 から 0.3 に減少した場合, の提案手法, 比較手法双方の推定誤差をそれぞれ示している. また, 箱ひげ図の手法のラベルの内, 赤い文字は, その条件における該当手法の推定精度の中央値と標準正規乱数による推定誤差の中央値の Wilcoxon の順位和検定による検定の結果, 有意水準 5% で推定誤差の中央値が等しいという帰無仮説を棄却できない, または, 有意に推定誤差が大きくなったことを示している.

A.2 提案手法, 比較手法間のアルゴリズムの収束率, 反復回数

以下では, 第 4 章で設定した潜在空間の次元数, 視点数, 部分集合の観測率, ノイズパラメータの組 (D, P, R, σ^2) ごとに, 提案手法と比較手法, それぞれにおけるアルゴリズムの収束率と反復回数の中央値を示す.

表 A 提案手法, 比較手法間のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値: 以下の表では, 推定試行が一度も収束し無かった条件での中央値は, ‘-’ で表現している.

(a) 潜在空間の次元数 $D = 3$, 視点数が $P = 30$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 3, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	16*	19
D = 3, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	19*	22
D = 3, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	0.99	23*	31
D = 3, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.98	0.98	55*	125
D = 3, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	14*	16.5
D = 3, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	17	17
D = 3, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	20	20
D = 3, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	1	31*	58.5

(b) 潜在空間の次元数 $D = 3$, 視点数が $P = 50$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 3, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	15*	17
D = 3, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	17*	18
D = 3, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	19*	24
D = 3, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	1	1	40*	89
D = 3, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	14*	16.5
D = 3, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	18	18
D = 3, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	19	19
D = 3, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	1	25*	37

(c) 潜在空間の次元数 $D = 3$, 視点数が $P = 70$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 3, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	14*	16
D = 3, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	16*	17
D = 3, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	17.5*	21
D = 3, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	1	1	38*	75
D = 3, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	15*	16
D = 3, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	15	15
D = 3, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	19	18
D = 3, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	1	23*	31

(d) 潜在空間の次元数 $D = 3$, 視点数が $P = 100$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 3, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	14*	15
D = 3, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	15*	16
D = 3, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	17*	19.5
D = 3, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	1	1	30*	62
D = 3, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	15*	16
D = 3, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	16	15.5
D = 3, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	19	18
D = 3, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	1	21*	28

(e) 潜在空間の次元数 $D = 5$, 視点数が $P = 30$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 5, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	20*	44
D = 5, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	0.99	1	27*	74
D = 5, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.91*	0.63	38*	444
D = 5, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.59*	0.1	129*	683
D = 5, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	24*	41
D = 5, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	40	39
D = 5, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.93	0.98	48*	102
D = 5, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.86	0.89	97*	263

(f) 潜在空間の次元数 $D = 5$, 視点数が $P = 50$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	17*	29
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	23*	35
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.99	0.99	28*	157
D = 5, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.94*	0.72	115*	561
D = 5, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	23*	36.5
D = 5, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	40	38
D = 5, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	42*	63
D = 5, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	0.98	105*	209.5

(g) 潜在空間の次元数 $D = 5$, 視点数が $P = 70$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 5, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	16*	26
D = 5, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	23*	28
D = 5, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	0.99	25*	79
D = 5, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.94	0.9	102*	413
D = 5, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	23*	36
D = 5, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	38	37.5
D = 5, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	40*	51
D = 5, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	1	0.7	88*	181

(h) 潜在空間の次元数 $D = 5$, 視点数が $P = 100$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 5, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	16*	24
D = 5, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	21*	26
D = 5, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	24*	49
D = 5, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.96	0.98	96*	353.5
D = 5, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	23*	35
D = 5, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	37	37
D = 5, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	1	1	40*	50
D = 5, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.97	0.99	73*	166.5

(i) 潜在空間の次元数 $D = 7$, 視点数が $P = 30$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 7, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	0.93*	0.58	26*	407
D = 7, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	0.6*	0.03	-	-
D = 7, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.29*	0	-	-
D = 7, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.17*	0	-	-
D = 7, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	36*	67.5
D = 7, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	75	72.5
D = 7, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.75	0.77	70*	511
D = 7, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.71*	0.35	148*	619

(j) 潜在空間の次元数 $D = 7$, 視点数が $P = 50$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 7, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	21*	59
D = 7, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	0.95	31*	161
D = 7, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.97*	0	-	-
D = 7, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.7*	0	-	-
D = 7, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	33*	56
D = 7, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	60	60.5
D = 7, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.93	0.97	64*	302
D = 7, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.68	0.7	129*	547

(k) 潜在空間の次元数 $D = 7$, 視点数が $P = 70$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 7, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	20*	44
D = 7, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	29*	71
D = 7, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.98*	0.3	36*	608.5
D = 7, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.7*	0	-	-
D = 7, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	32*	52
D = 7, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	60	57
D = 7, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.97	0.98	60*	186
D = 7, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.73	0.83	121*	415

(l) 潜在空間の次元数 $D = 7$, 視点数が $P = 100$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 7, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	1	20*	38
D = 7, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	29*	50
D = 7, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	1*	0.71	31*	479
D = 7, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.69*	0.2	241*	842
D = 7, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	31*	51
D = 7, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	55	53
D = 7, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.97	1	56*	126
D = 7, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.84	0.9	150*	359

(m) 潜在空間の次元数 $D = 10$, 視点数が $P = 30$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 10, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	0.12*	0	-	-
D = 10, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	0	0	-	-
D = 10, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0	0	-	-
D = 10, P = 30, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0	0	-	-
D = 10, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	83*	150
D = 10, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	0.88	0.9	164*	386
D = 10, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.49*	0.05	-	-
D = 10, P = 30, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.4*	0	-	-

(n) 潜在空間の次元数 $D = 10$, 視点数が $P = 50$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 =$ ノイズ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 10, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1*	0	-	-
D = 10, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	0.97*	0	-	-
D = 10, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.45*	0	-	-
D = 10, P = 50, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.13*	0	-	-
D = 10, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	54*	94
D = 10, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	110*	145
D = 10, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.59*	0.36	99*	547
D = 10, P = 50, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.49*	0	-	-

(o) 潜在空間の次元数 $D = 10$, 視点数が $P = 70$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

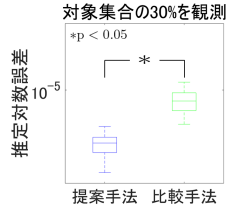
D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 = \text{ノイズ}$ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 10, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1*	0	-	-
D = 10, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1*	0	-	-
D = 10, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.68*	0	-	-
D = 10, P = 70, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.23*	0	-	-
D = 10, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	47*	78
D = 10, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	93*	117
D = 10, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.68	0.63	85.5*	580
D = 10, P = 70, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.58*	0.13	260*	783

(p) 潜在空間の次元数 $D = 10$, 視点数が $P = 100$ の場合のアルゴリズムの収束率, 反復回数の中央値 (* $P < 0.05$)

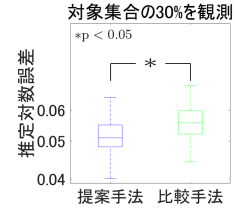
D = 次元数, P = 視点数, R = 観測率, $\sigma^2 = \text{ノイズ}$ (潜在空間) (部分集合) パラメータ	収束率 (提案手法)	収束率 (比較手法)	反復回数(中央値) (提案手法)	反復回数(中央値) (比較手法)
D = 10, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0$	1	0.97	25.5*	203
D = 10, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.01$	1*	0	-	-
D = 10, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 0.1$	0.85*	0	-	-
D = 10, P = 100, R = 0.3, $\sigma^2 = 1$	0.55*	0	-	-
D = 10, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0$	1	1	43*	69
D = 10, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.01$	1	1	81.5*	89.5
D = 10, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 0.1$	0.85	0.78	80*	540.5
D = 10, P = 100, R = 0.5, $\sigma^2 = 1$	0.55*	0.38	195*	694

A.3 提案手法, 比較手法での対象の推定精度比較

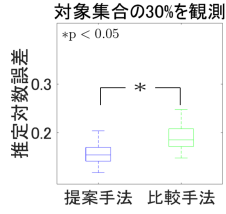
以下では, 第 4 章で設定した潜在空間の次元数, 視点数, 部分集合の観測率の組 $(D, P.R)$ ごとに, $\sigma^2 \in \{0, 0.01, 0.1, 1\}$ の各パターンごとでの提案手法と比較手法の対象の推定精度の箱ひげ図を示す.



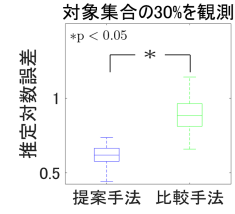
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

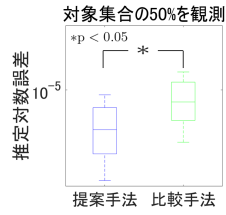


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

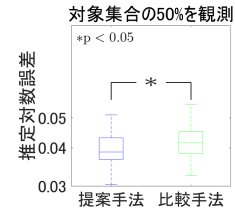


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

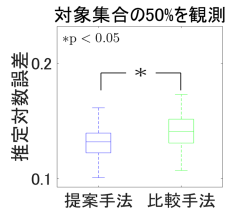
(a)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



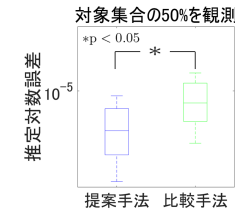
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



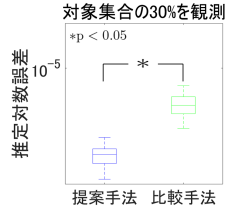
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



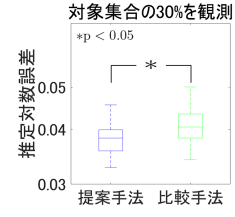
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(a)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

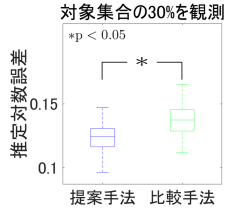
(a) 潜在空間の次元数が $D = 3$, 視点数が $P = 30$ の場合



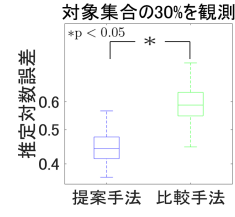
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

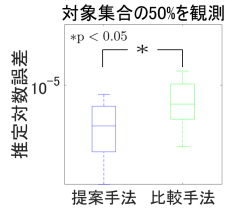


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

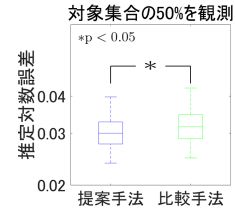


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

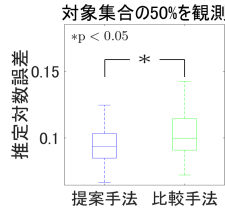
(b)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



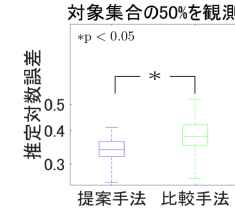
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



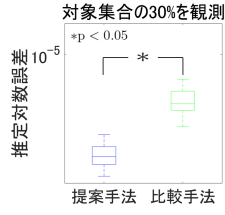
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



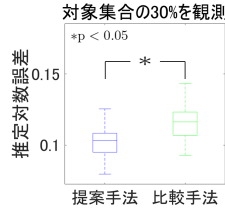
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(b)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

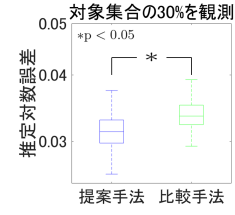
(b) 潜在空間の次元数が $D = 3$, 視点数が $P = 50$ の場合



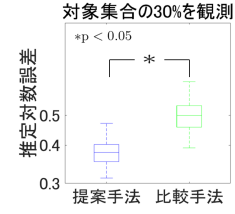
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

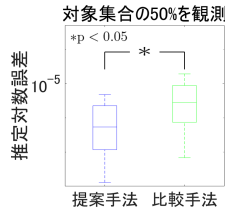


[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

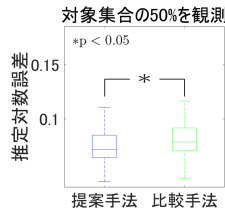


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

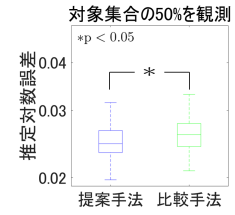
(c)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



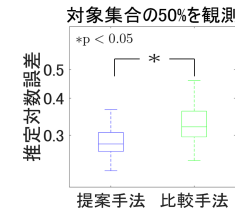
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



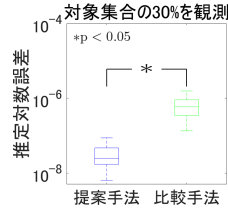
[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



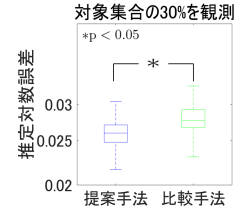
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(c)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

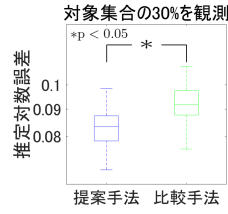
(c) 潜在空間の次元数が $D = 3$, 視点数が $P = 70$ の場合



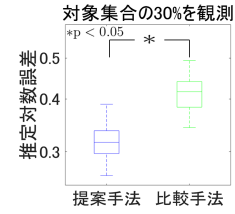
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

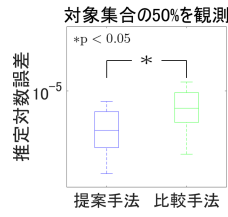


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

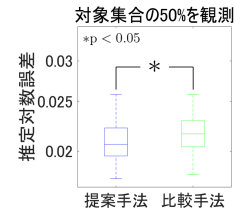


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

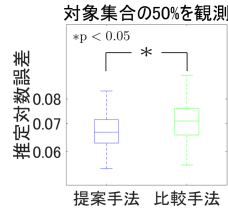
(d)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



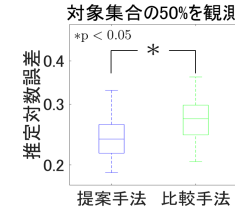
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



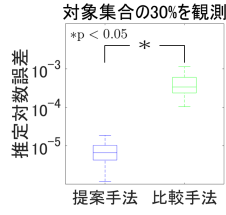
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



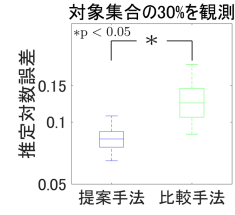
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(d)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

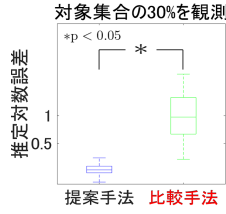
(d) 潜在空間の次元数が $D = 3$, 視点数が $P = 100$ の場合



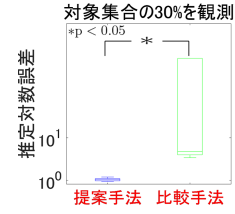
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

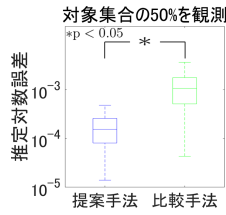


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

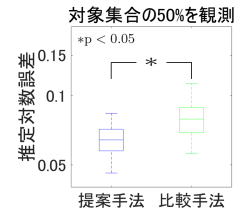


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

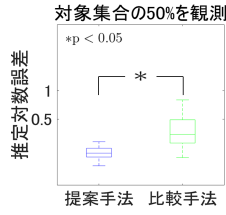
(e)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



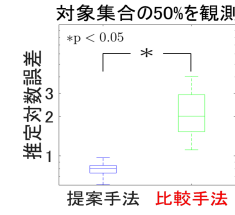
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



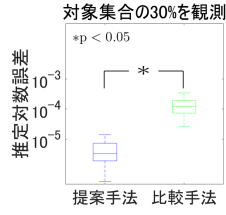
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



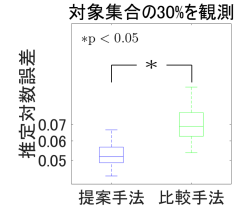
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(e)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

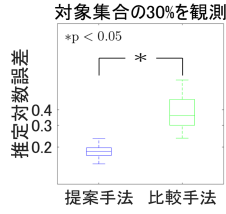
(e) 潜在空間の次元数が $D = 5$, 視点数が $P = 30$ の場合



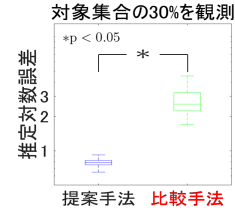
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

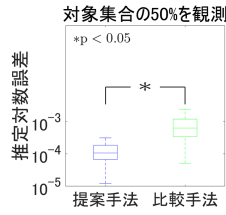


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

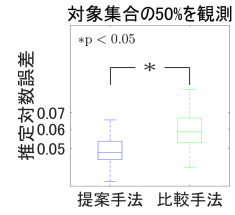


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

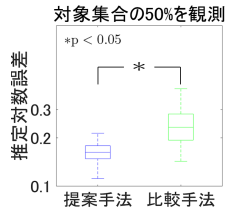
(f)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



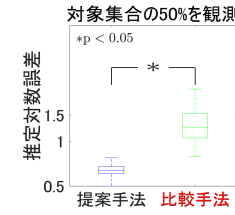
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



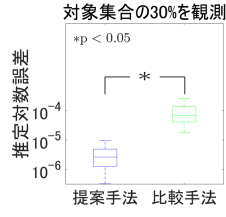
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



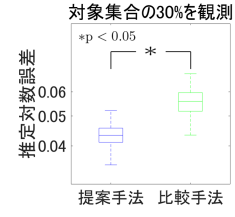
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(f)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

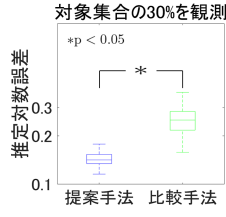
(f) 潜在空間の次元数が $D = 5$, 視点数が $P = 50$ の場合



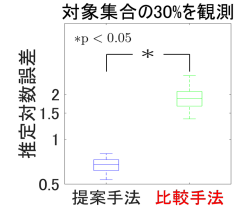
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

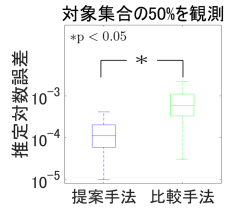


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

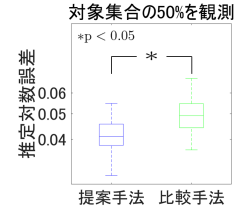


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

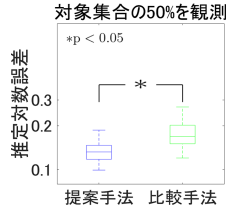
(g)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



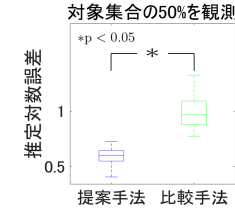
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



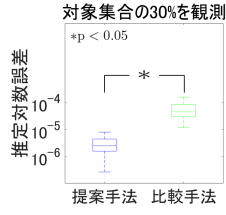
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



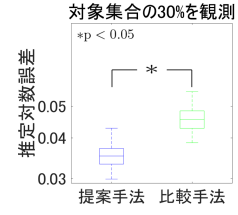
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(g)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

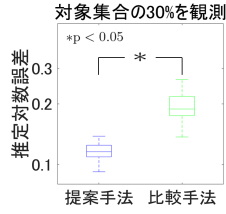
(g) 潜在空間の次元数が $D = 5$, 視点数が $P = 70$ の場合



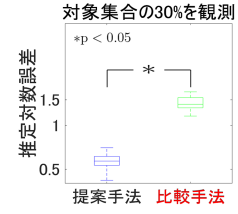
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

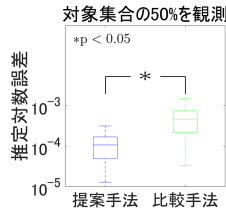


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

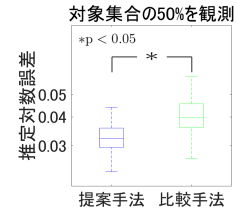


[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

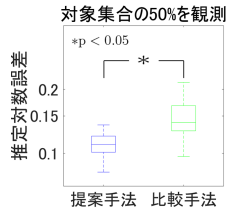
(h)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



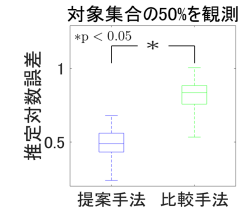
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



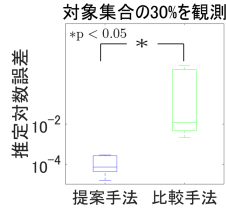
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(h)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(h) 潜在空間の次元数が $D = 5$, 視点数が $P = 100$ の場合



比較不能

[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

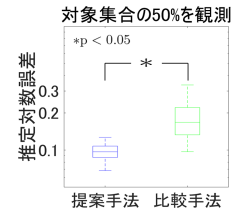
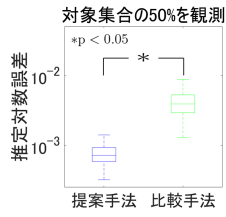
比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

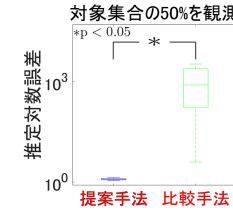
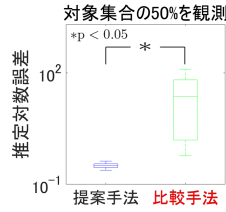
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(i)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

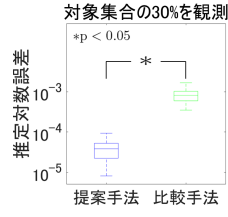


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

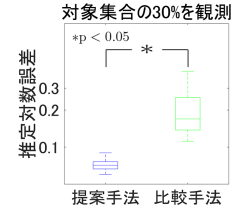
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(i)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(i) 潜在空間の次元数が $D = 7$, 視点数が $P = 30$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

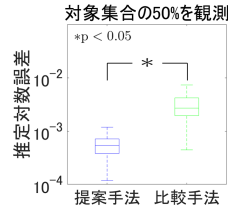
比較不能

比較不能

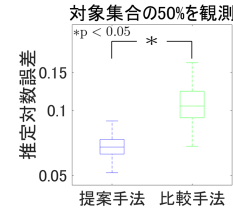
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

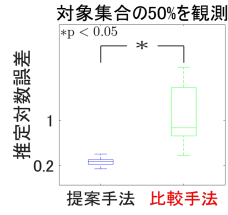
(j)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



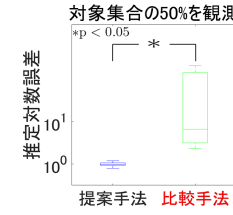
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



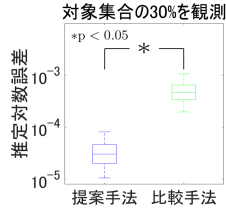
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



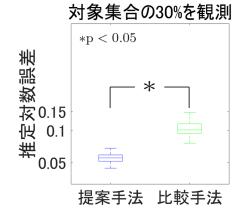
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(j)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

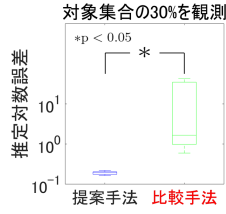
(j) 潜在空間の次元数が $D = 7$, 視点数が $P = 50$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

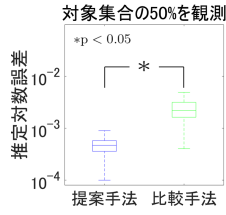


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

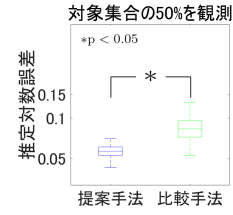
比較不能

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

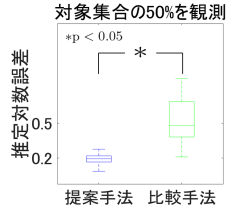
(k)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



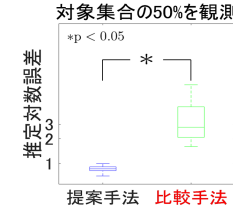
[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)



[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



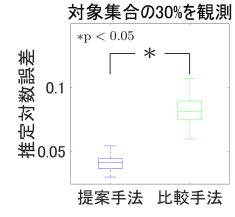
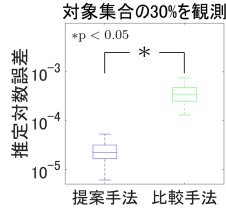
[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)



[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

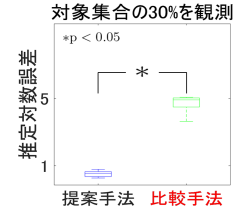
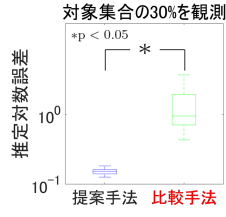
(k)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(k) 潜在空間の次元数が $D = 7$, 視点数が $P = 70$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

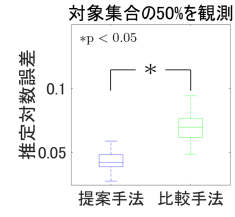
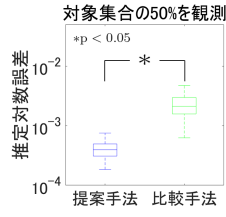
[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

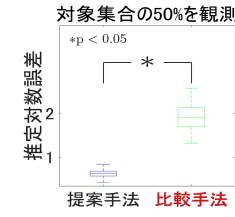
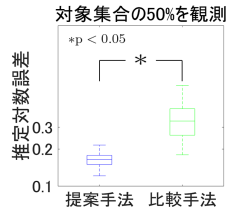
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(1)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(1)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(1) 潜在空間の次元数が $D = 7$, 視点数が $P = 100$ の場合

比較不能

比較不能

[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

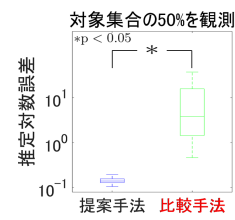
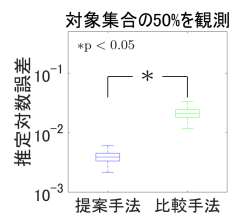
比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(m)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(m)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(m) 潜在空間の次元数が $D = 10$, 視点数が $P = 30$ の場合

比較不能

比較不能

[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

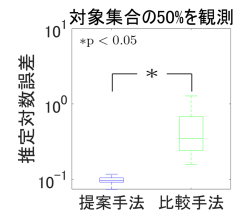
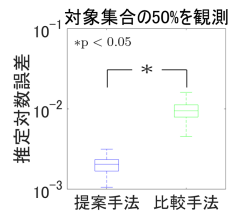
比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

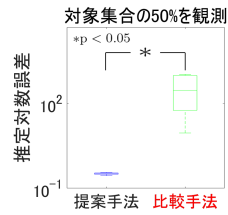
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(n)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(n)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(n) 潜在空間の次元数が $D = 10$, 視点数が $P = 50$ の場合

比較不能

比較不能

[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

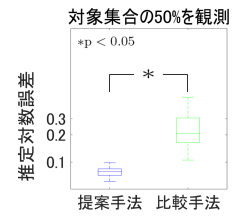
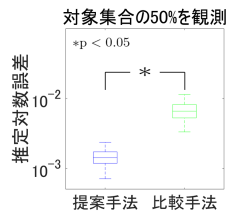
比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

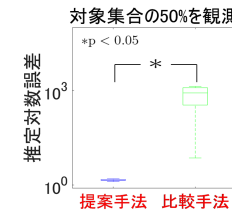
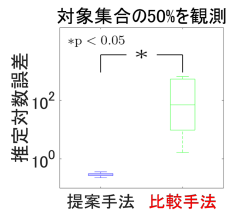
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(o)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

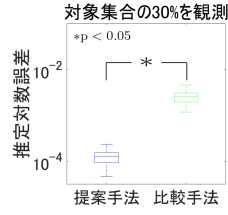


[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(o)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(o) 潜在空間の次元数が $D = 10$, 視点数が $P = 70$ の場合



比較不能

[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)

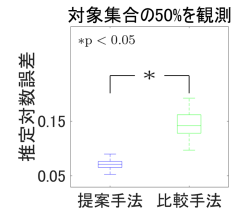
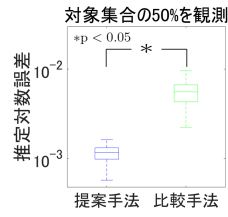
比較不能

比較不能

[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

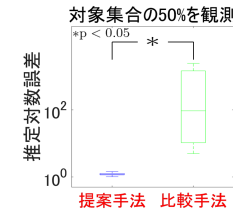
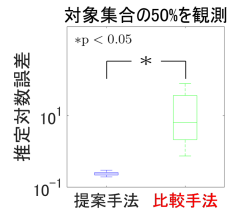
[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(p)-1 観測率 $R = 0.3$ の場合



[1] ノイズなし ($\sigma^2 = 0$)

[2] ノイズ小 ($\sigma^2 = 0.01$)



[3] ノイズ中 ($\sigma^2 = 0.1$)

[4] ノイズ大 ($\sigma^2 = 1$)

(p)-2 観測率 $R = 0.5$ の場合

(p) 潜在空間の次元数が $D = 10$, 視点数が $P = 100$ の場合

図 A.3 提案手法, 比較手法, それぞれによる対象の推定精度: 手法のラベルの内, 赤文字になっているものは, 標準正規乱数による推定誤差との Wilcoxon の順位和検定の結果, 有意水準 5% で帰無仮説を棄却できない場合に表示している.